Einführung in die Diskrete Mathematik
9. Übung

1. Betrachten Sie noch einmal die Verallgemeinerung des Minimum-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind, aus Aufgabe 2 von Zettel 8. Zeigen Sie, dass man Instanzen (G, u, b, c) dieser Verallgemeinerung in Zeit $O((k + n) \log(k + n)(m + n \log(n)))$ lösen kann, wobei k die Zahl der Kanten mit endlicher Kapazität sei (und wie üblich $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$) (3 Punkte)

2. Es sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems mit ganzzahligen Kosten c. Außerdem sei f eine optimale Lösung und $e_0 \in E(G)$. Die Kostenfunktion $c' : E(G) \to \mathbb{Z}$ sei wie folgt definiert: $c'(e_0) = c(e_0) + 1$ und $c'(e) = c(e)$ für $e \in E(G) \setminus \{e_0\}$. Zeigen Sie, wie man zu gegebenem (G, u, b, c'), e_0 und f in Zeit $O(|E(G)| + |V(G)|^3)$ einen kostenminimalen Fluss in (G, u, b, c') finden kann. (5 Punkte)

3. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e\in\delta(v)} f(e) \le b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e\in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.
   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.
   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+3 Punkte)

4. Eine Firma schätzt, dass sie in Kalenderwoche i bis zu p_i Autos produzieren kann und bis zu v_i Autos verkaufen kann ($i = 1, \dots, 52$). Produzierte Autos stehen ab Beginn der folgenden Kalenderwoche zum Verkauf bereit. Ein in Woche i produziertes und in Woche $j > i$ verkauftes Auto belegt in den Wochen $i + 1, \dots, j$ Lagerraum. Die Firma kann immer nur höchstens l Autos lagern. In der ersten Kalenderwoche wird nicht produziert, d.h. $p_1 = 0$, es stehen aber aus der Vorjahresproduktion noch p_0 produzierte Autos im Lager.
   (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Firma möchte feststellen, wieviele Autos sie bis zur k-ten Kalenderwoche maximal verkaufen kann.
   (b) Außerdem möchte sie wissen, ob sich diese Zahl verringert, wenn sie die Produktion auch in der zweiten Kalenderwoche ruhen lässt.
   (c) Bei Produktionskosten von P und Verkaufserlösen von V je Auto, sowie Lagerkosten von L je Auto und Woche stellt sich die Frage, wann wieviele Autos produziert werden sollen, um den Gewinn zu maximieren. Ignorieren Sie dabei Zinseffekte. (2+2+2 Punkte)

   Können Sie der Firma helfen?

Abgabe: Dienstag, der 14.12.2021, **vor** der Vorlesung im Hörsaal

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier virtuell am Dienstag, den 21.12., ab 18 c.t. statt. Alle aktuellen Informationen und eine Anmeldung sind auf unserer Website (fsmath.uni-bonn.de) zu finden. Schaut vorbei!