

Algorithmische Mathematik I

Anwesenheitsaufgaben

1. Es seien X, Y, Z drei Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Es sei $g \circ f$ die Hintereinanderausführung von f und g , also $g \circ f(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$. Welche dieser Aussagen folgen aus diesen Voraussetzungen?
 - (a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
 - (b) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.
 - (c) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.
 - (d) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
 - (e) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv.
 - (f) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist g surjektiv.

Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an, der zu gegebenen natürlichen Zahlen a und b die Zahl a^b berechnet, und der nur $O(\log_2 b)$ elementare Rechenoperationen ($+$, $-$, $*$, $/$, $\%$) durchführt. Beweisen Sie, dass Ihr Algorithmus tatsächlich diese Eigenschaften hat.
3. Die Potenzmenge einer Menge X ist die Menge aller Teilmengen von X . Zeigen Sie, dass die Potenzmenge von \mathbb{N} überabzählbar ist.
4. Zeigen Sie, dass es für alle natürlichen Zahlen m und n ganze Zahlen s und t gibt, für die $\text{ggT}(n, m) = s \cdot m + t \cdot n$ gilt.
5. Geben Sie die Darstellung der Zahl $(3324)_5$ bezüglich der Basis 7 an und wandeln Sie die Oktalzahl $(6272)_8$ in das Binärsystem um.
6. In dieser Aufgabe betrachten wir Komplementdarstellungen zur Basis 2.
 - (a) Schreiben Sie die Zahl -25 in Komplementdarstellung mit 8 Bits und mit 16 Bits.
 - (c) Für welche negativen Zahlen x ist die Komplementdarstellung mit l Bits bis auf die Vorzeichenstelle identisch mit der Komplementdarstellung von $-x$?
7. Schreiben Sie die Zahlen $125,125$ und $99,9$ und $\frac{1}{7}$ jeweils in normalisierter 2-adischer Darstellung.

8. Wir betrachten einen Ein-Byte-Rechner mit Gleitkomma-Arithmetik. Bei der Zahlendarstellung werden ein Bit für das Vorzeichen, vier Bit für die Mantisse und drei Bit für den Exponenten (mit denen die Exponenten -2 , -1 , 0 , 1 , 2 und 3 kodiert werden können) verwendet. Die führende Eins in der Mantisse wird nicht abgespeichert.
- (a) Welche Darstellung haben die Zahlen 6.5 und -0.375 ?
 - (b) Wie viele Zahlen können in diesem Gleitkomma-Format dargestellt werden?
 - (c) Geben Sie die maximale und minimale darstellbare Zahl z_{\min} und z_{\max} sowie die betragsmäßig kleinste darstellbare Zahl ungleich Null an.
 - (d) Skizzieren Sie alle darstellbaren Zahlen auf einer Zahlengeraden.
 - (e) Nicht darstellbare Zahlen werden auf die nächstgelegene darstellbare Zahl gerundet. Bestimmen Sie den maximalen absoluten und relativen Rundungsfehler für reelle Zahlen im Bereich $[z_{\min}, z_{\max}]$.
9. Geben Sie zwei positive Zahlen $x, y \in F_{\text{double}}$ an mit $x - y \notin F_{\text{double}}$
10. Wie viele Kanten kann ein einfacher unzusammenhängender ungerichteter Graph mit n Knoten höchstens haben?