Wintersemester 2013/14
Prof. Dr. J. Vygen
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Im Achtelfinale der UEFA-Champions-League werden 16 Mannschaften gegeneinander gelost. Jede dieser Mannschaften hat in der Runde zuvor einen der ersten beiden Plätze in einer von 8 Qualifikationsgruppen belegt. Bei der Auslosung des Achtelfinals sind folgende Regeln zu beachten:

   - Es wird immer ein Gruppenerster gegen einen Gruppenzweiten gelost.
   - Kein Gruppenerster spielt im Achtelfinale gegen den Gruppenzweiten aus der eigenen Gruppe.
   - Keine Mannschaft spielt im Achtelfinale gegen eine Mannschaft aus dem eigenen Land.

   Nach den gegenwärtigen Regeln können aus jedem Land höchstens vier Mannschaften an der Champions-League teilnehmen. Zeigen Sie, dass es immer eine Achtelfinalauslosung gibt, die den obigen Bedingungen genügt. (2 Punkte)

2. Es sei U eine endliche Menge und $\mathcal{S} \subseteq 2^U$. Für $u \in U$ setze man $r(u) := |\{S \in \mathcal{S} \mid u \in S\}|$. Es sei $n := |\mathcal{S}|$ und $N := \sum_{S \in \mathcal{S}} |S| = \sum_{u \in U} r(u)$. Angenommen, es gilt $|S| < \frac{N}{n-1}$ für $S \in \mathcal{S}$ und $r(u) < \frac{N}{n-1}$ für $u \in U$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ dann ein Repräsentantensystem hat. (3 Punkte)

3. Es sei G ein azyklischer gerichteter Graph.

   (a) Beweisen Sie, dass die minimale Anzahl von Wegen in G, von denen alle Knoten überdeckt werden, gleich der maximalen Anzahl von Knoten ist, von denen keine zwei auf demselben Weg liegen.

   (b) Es sei $F \subseteq E(G)$. Zeigen Sie, dass dann die minimale Anzahl von Wegen, die F überdecken, gleich

   $$\max\{|C \cap F| \mid C \text{ ist ein gerichteter Schnitt in } G\}$$

   ist. (3+4 Punkte)

b.w.

4. Es sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition $V(G) = A \dot{\cup} B$, $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ und $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$. Für jeden Vektor $x = (x_e)_{e \in E(G)}$ sei $M_G(x) = (m_{ij}^x)_{1 \leq i,j \leq k}$ die Matrix mit

$$m_{ij}^x := \begin{cases} x_e & \text{für } e = \{a_i, b_j\} \in E(G), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Determinante $\det M_G(x)$ ist dann also ein Polynom in $x = (x_e)_{e \in E(G)}$. Zeigen Sie, dass G genau dann ein perfektes Matching besitzt, wenn $\det M_G(x)$ nicht identisch Null ist. (3 Punkte)

5. Man beschreibe eine Turingmaschine mit Alphabet $\{0, 1, \#\}$, die zwei binäre Strings vergleicht: Der Input bestehe aus einem String $a\#b$ mit $a, b \in \{0,1\}^*$, und der Output sei 1 für $a = b$ und 0 für $a \neq b$. (5 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 14.1.2014, vor der Vorlesung.