Wintersemester 2013/14 — Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. J. Vygen — Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik

10. Übung

1. Gegeben sei ein Netzwerk (G, u, s, t) mit ganzzahligen Transitzeiten $l : E(G) \to \mathbb{N}$, einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$, einer Zahl $F \in \mathbb{R}_+$ und Kosten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Man sucht einen zeitabhängigen s-t-Fluss f mit $\mathrm{value}(f) = F$ und minimalen Kosten
$$\sum_{e \in E(G)} c(e) \int_0^T f_e(\tau) d\tau.$$
Zeigen Sie, wie man dieses Problem in polynomieller Zeit lösen kann, falls T eine Konstante ist. (4 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie ein Netzwerk mit einer Kopie von G für jeden diskreten Zeit-Schritt.

2. Es sei G ein ungerichteter Graph. Eine Menge $S \subseteq V(G)$ von Knoten heiße *stabil*, wenn es keine zwei Knoten in S gibt, die in G durch eine Kante verbunden sind. Es sei $\alpha(G)$ die größte Kardinalität einer stabilen Menge in G. Eine Menge $F \subseteq E(G)$ von Kanten heiße *Kantenüberdeckung von G*, wenn es für jeden Knoten $v \in V(G)$ eine Kante $e \in F$ mit $v \in e$ gebe. Es sei $\zeta(G)$ die kleinste Kardinalität einer Kantenüberdeckung.
   (a) Zeigen Sie, dass, wenn G ein bipartiter Graph ohne isolierte Knoten ist, $\zeta(G) = \alpha(G)$ gilt.
   (b) Zeigen Sie, dass man in bipartiten Graphen ohne isolierte Knoten sowohl eine größte stabile Menge als auch eine kleinste Kantenüberdeckung in polynomieller Laufzeit bestimmen kann. (3+3 Punkte)

3. Eine Gruppe von Studenten bewirbt sich um die Teilnahme an Seminaren. Dabei wählt jeder Student genau drei Seminare aus einer gegebenen Menge von Seminaren aus. Zwei der Seminare werden von genau 40 Studenten gewählt, während alle anderen von höchstens 39 Studenten gewählt werden.
   (a) Man zeige, dass jeder Student einem seiner ausgewählten Seminare zugeteilt werden kann, und zwar so, dass es in keinem Seminar mehr als 13 Studenten gibt.
   (b) Zeigen Sie außerdem, dass eine solche Zuordnung in Zeit $O(n^2)$ berechnet werden kann, wobei n die Zahl der Studenten ist. (3+1 Punkte)

4. (a) Sei $S = \{1, \ldots, n\}$ und $0 \leq k < \frac{n}{2}$. Sei A bzw. B die Familie aller k-elementigen bzw. $(k+1)$-elementigen Teilmengen von S. Man bilde den bipartiten Graphen
$$G = (A \dot\cup B, \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in B, a \subset b\})$$
und beweise, dass G ein A überdeckendes Matching besitzt.
   (b) Folgern Sie daraus Sperners Lemma: Die maximale Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge mit der Eigenschaft, dass keine der Teilmengen eine andere enthält, ist $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. (3+3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 7.1.2014, vor der Vorlesung.