Einführung in die Diskrete Mathematik

8. Übung

1. Man beweise den Zirkulationssatz von Hoffman: Gegeben seien ein gerichteter Graph G und untere bzw. obere Schranken $l, u : E(G) \to \mathbb{R}$ mit $l(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$. Es gibt genau dann eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}$ mit $l(e) \leq f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta^-(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^+(v)} f(e)$ für alle $v \in V(G)$, wenn
$$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \leq \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \text{ für alle } X \subseteq V(G) \text{ gilt.}$$
(5 Punkte)

2. Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man den aus der Vorlesung bekannten Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus so abändert, dass man nicht mehr notwendigerweise einen Kreis mit minimalem Durchschnittsgewicht wählt, sondern entlang irgendeines beliebigen augmentierenden Kreises mit negativem Gewicht augmentiert (natürlich augmentiert man auf dem Kreise so viel wie möglich). Zeigen Sie, dass das veränderte Verfahren (bei ungeschickter Wahl der Kreise) nicht mehr unbedingt nach einer polynomiellen Anzahl von Augmentierungen terminiert. (4 Punkte)

3. Wir betrachten ein Verfahren, das aus dem Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus entsteht, indem man zwei Änderungen durchführt:

   - Man augmentiert stets um $\gamma' := \min \left\{ \min_{e \in E(P)} u_f(e), \quad \max\{b'(s), -b'(t)\} \right\}$.
   - Der s-t-Weg P wird so ausgewählt, dass der zugehörige γ'-Wert maximal ist.

   Zeigen Sie, dass die Wahl von P in polynomieller Zeit möglich ist und dass dieser Algorithmus bei ganzzahligem u und b ebenfalls nach höchstens $\frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} |b(v)|$ Augmentierungen terminiert. Zeigen Sie außerdem durch ein Beispiel, dass er mehr Augmentierungen benötigen kann als der (unveränderte) Sukzessive-Kürzeste-Wege-Algorithmus. (5 Punkte)

4. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e) f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.

   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+3 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 10.12.2013, vor der Vorlesung.