Wintersemester 2012/13
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

# Einführung in die Diskrete Mathematik
## 10. Übung

1. Betrachten Sie das Maximum-Flow-Problem eingeschränkt auf Instanzen $(G, u, s, t)$, für die $G - t$ eine Arboreszenz ist. Zeigen Sie, daß man das so eingeschränkte Problem in linearer Zeit lösen kann. (4 Punkte)
   Hinweis: Benutzen Sie Tiefensuche

2. Sei $(G, u, s, t)$ ein Netzwerk, $f$ ein $s$-$t$-Präfluß in $(G, u)$ und $\psi$ eine Abstandsmarkierung bezüglich $f$ mit $\psi(v) \leq 2n$ für alle $v \in V(G)$. Sei $\psi'(v) := \min\{\mathrm{dist}_{G_f}(v,t), n + \mathrm{dist}_{G_f}(v,s), 2n\}$ für alle $v \in V(G)$.
   Zeigen Sie: $\psi'$ ist eine Abstandsmarkierung bezüglich $f$, und es gilt $\psi(v) \leq \psi'(v)$ für alle $v \in V(G)$. (4 Punkte)

3. In der Vorlesung wurde gezeigt, daß der Goldberg-Trajan-Algorithmus $O(n^2\sqrt{m})$ nichtsaturierende Push-Operationen durchführt, wenn man in Zeile 3 immer einen aktiven Knoten $v$ mit größtem $\psi$-Wert auswählt. Zeigen Sie, daß der Algorithmus auch bei beliebiger Wahl von $v$ in Zeile 3 höchstens $O(n^2 m)$ nichtsaturierende Push-Operationen durchführt. (4 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

4. Sei $G$ ein ungerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $u(e) = 1$ für alle $e \in E(G)$. Wir bezeichnen wie in der Vorlesung für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ mit $\lambda_{st}$ die minimale Kapazität eines $s$ und $t$ trennenden Schnittes in $G$. Seien nun $x, y, z \in V(G)$ drei verschiedene Knoten und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq \lambda_{xy}$, $\beta \leq \lambda_{xz}$ und $\alpha + \beta \leq \max\{\lambda_{xy}, \lambda_{xz}\}$. Zeigen Sie, daß es dann $\alpha$ $x$-$y$-Wege und $\beta$ $x$-$z$-Wege gibt, so dass diese $\alpha + \beta$ Wege paarweise kantendisjunkt sind. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 20.12.2012, vor der Vorlesung.