Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner
C. Mohr

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I

12. Übung

1. Kondition von Matrizen

   Seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguläre Matrizen. Zeigen Sie die folgenden Zusammenhänge:

   (a) Betrachten Sie die Kondition bezüglich der von der Vektornorm $\|\cdot\|$ induzierten Matrixnorm. Dann gilt

   $$\kappa(\boldsymbol{A}) = \frac{\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\|}{\min_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\|},$$

   (b) $\kappa(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \leq \kappa(\boldsymbol{A})\kappa(\boldsymbol{B})$ für alle submultiplikativen Matrixnormen,

   (c) $\kappa(c\boldsymbol{A}) = \kappa(\boldsymbol{A})$ für alle $0 \neq c \in \mathbb{R}$,

   (d) $\kappa_2(\boldsymbol{Q}) = 1$ für eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q}$ (dabei heißt $\boldsymbol{Q}$ orthogonal, wenn $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$ gilt),

   (e) $\kappa_2(\boldsymbol{A}) \leq \kappa_F(\boldsymbol{A}) \leq \kappa_G(\boldsymbol{A}) \leq n^2 \kappa_\infty(\boldsymbol{A})$, wobei κ_G die Kondition bezüglich der Gesamtnorm $\|\boldsymbol{A}\|_G := n \cdot \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}|$ bezeichnet,

   (f) $\kappa_2(\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A}) = \kappa_2(\boldsymbol{A})$, falls $\boldsymbol{Q}$ eine orthogonale Matrix ist.

   (10 Punkte)

2. Gegeben seien

   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -4 & 9 \\ -2 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie die $\boldsymbol{L}$-$\boldsymbol{R}$-Zerlegung der Matrix $\boldsymbol{A}$.

   (b) Lösen Sie mittels Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

   (10 Punkte)

3. (a) Eine Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **Bandmatrix** der Bandbreite $2m+1$, falls gilt

$$|i-j| > m \qquad \Rightarrow \qquad a_{ij} = 0.$$

Sei $\boldsymbol{A}$ regulär. Zeigen Sie: Die $\boldsymbol{L}$-$\boldsymbol{R}$-Zerlegung erhält die Bandstruktur, das heißt, ist $\boldsymbol{A}$ eine Bandmatrix der Bandbreite $2m+1$, so sind auch $\boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ Bandmatrizen der Bandbreite $2m+1$.

(b) Bei vielen Anwendungen treten Matrizen auf, bei denen bis auf die Hauptdiagonale und wenige Nebendiagonalen alle Einträge verschwinden, also Matrizen mit

$$|i-j| \notin I \qquad \Rightarrow \qquad a_{ij} = 0,$$

wobei $I \subset \mathbb{N}$ die Diagonalen mit nichtverschwindenden Einträgen indiziert. Sei $I \neq \{0,1,\ldots,m\}$, sodass sich diese Matrizen von den oben beschriebenene Bandmatrizen unterscheiden. Bleibt diese Struktur bei der $\boldsymbol{L}$-$\boldsymbol{R}$-Zerlegung erhalten? (10 Punkte)

4. Sei $\boldsymbol{A}$ eine Tridiagonal-Matrix, das heißt eine Bandmatrix der Bandbreite 3, also

$$\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} &|a_1| > |c_1| > 0 \\ &|a_i| \geq |b_i| + |c_i|, \qquad b_i,\, c_i \neq 0 \quad \text{für } 2 \leq i \leq n-1 \\ &|a_n| \geq |b_n| > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar und besitzt eine $\boldsymbol{L}$-$\boldsymbol{R}$-Zerlegung der Form

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ l_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 & c_1 & & & 0 \\ & r_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & & r_n \end{pmatrix},$$

wobei die Vektoren $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n$ gegeben sind durch $r_1 = a_1$, $l_i = b_i/r_{i-1}$ und $r_i = a_i - l_i c_{i-1}$ für $2 \leq i \leq n$. (10 Punkte)

Abgabe: Mittwoch, den 28.01.2009, **vor** der Vorlesung.