Wintersemester 2008/09 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy | Universität Bonn
Dr. U. Brenner
C. Mohr

Algorithmische Mathematik I
8. Übung

1. (a) Seien (V, F_1) und (V, F_2) zwei Wälder mit $|F_1| < |F_2|$. Man beweise, dass es eine Kante $e \in F_2 \setminus F_1$ gibt, so dass $(V, F_1 \cup \{e\})$ ein Wald ist.

   (b) Sei T ein Baum. Zeigen Sie, dass das Hinzufügen einer weiteren Kante zu T genau einen Kreis erzeugt. (8 Punkte)

2. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph, $s \in V(G)$ und T ein Baum, der aus der DFS-Anwendung auf (G, s) resultiert. Der Knoten s heißt Wurzel von T. Es ist x ein Vorfahre von y in T, falls x auf dem (eindeutig definierten) s-y-Weg in T liegt. Es ist x der Vorgänger von y, falls die Kante $\{x, y\}$ auf dem s-y-Weg in T liegt. Es ist y ein Kind (Nachfolger) von x, falls x der Vorgänger (ein Vorfahre) von y ist. Man beachte, dass nach dieser Definition jeder Knoten ein Vorfahre und auch ein Nachfolger von sich selbst ist. Jeder Knoten mit Ausnahme von s hat genau einen Vorgänger. Man beweise:

   (a) Für jede Kante $\{v, w\} \in E(G)$ ist v ein Vorfahre oder ein Nachfolger von w in T.

   (b) Ein Knoten v ist genau dann ein Artikulationsknoten von G, wenn
   - entweder $v = s$ und $|\delta_T(v)| > 1$,
   - oder $v \neq s$ und es gibt ein Kind w von v, so dass keine Kante in G einen echten Vorfahren von v (d.h. außer v) mit einem Nachfolger von w verbindet.

   (8 Punkte)

3. Beweisen Sie, dass jeder Graph mit n Knoten und mehr als $\frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}$ Kanten einen Kreis der Länge höchstens 4 enthält. (10 Punkte)

4. Zeigen Sie, dass jeder Graph mit m Kanten einen bipartiten Subgraphen mit mindestens $\frac{m}{2}$ Kanten enthält. (7 Punkte)

5. Sei S eine n-elementige Menge und $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ eine Familie von paarweise verschiedenen Teilmengen von S. Zeigen Sie, dass es dann ein $x \in S$ gibt, so dass die Mengen $A_i \cup \{x\}$, $i = 1, \ldots, n$ paarweise verschieden sind. (7 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie die Kanten des Graphen $G = (\mathcal{A}, E)$, in dem $\{A_i, A_j\} \in E$ genau dann, wenn $|A_i \Delta A_j| = 1$ ist, wobei $A_i \Delta A_j := (A_i \setminus A_j) \cup (A_j \setminus A_i)$ sei.

Abgabe: Mittwoch, den 17.12.2008, **vor** der Vorlesung.