Wintersemester 2008/09
Prof. Dr. S. Hougardy
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Algorithmische Mathematik I

1. Übung

1. (a) Es seien a und b zwei positive reelle Zahlen. Betrachten Sie folgende rekursiv definierte Folge zur approximativen Berechung von $\sqrt{a}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= b \\ x_{k+1} &= \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right) \quad \text{für } k > 0 \end{aligned}$$

Berechnen Sie für $a = 14$ und $b = 4$ die Folgeglieder bis x_4 (jeweils dargestellt als gekürzter Bruch zweier natürlicher Zahlen). Bis zur wievielten dezimalen Nachkommstelle stimmen x_4 und $\sqrt{14}$ überein?

(b) Wie kann man $\sqrt{14}$ auf 5 Nachkommastellen genau bestimmen, indem man eine geeignete Zahl x quadriert? Die Zahl x soll sich dabei ohne explizite Wurzelberechnung bestimmen lassen, und aus x^2 soll direkt das Ergebnis ablesbar sein.

(8 Punkte)

2. Betrachen Sie das folgende C++-Programm:

```
# include <iostream>

using namespace std;

main()
{
      float x = 2.13, J[24];

      J[0] = 0.149606770448844240993152327550943526952773236732236;
      J[1] = 0.564996980564127346795321590791795201440533992018871;
      cout << sizeof(x) << endl;
      for (int k=1; k<=22; ++k)
      {
            J[k+1] = 2*k/x * J[k] - J[k-1];
            cout << J[k+1] << endl;
      }
}
```

Kompilieren Sie das Programm, und lassen Sie es laufen. Ersetzen Sie dann in der Deklaration „float“ zunächst durch „double“ und dann durch „long double“, und lassen Sie die beiden neuen Versionen ebenfalls laufen. Geben Sie für alle drei Programme die Ausgabe an. (8 Punkte)
Bemerkung: Das Programm steht auch auf der Internetseite dieser Übung `http://www.or.uni-bonn.de/lectures/ws08/alma1_08_uebung.html`.

3. Sei $b > 1$ eine natürliche Zahl, und seien x_1 und x_2 positive ganze Zahlen, die im b-adischen System höchstens n-stellig sind, und sei $x_3 \in \{0, \dots, b-1\}$. Zeigen Sie, dass dann $x_1 + x_2 + x_3$ und $x_1 \cdot x_3$ im b-adischen System höchstens $(n+1)$-stellig sind. (8 Punkte)

4. Zahlendarstellung mit negativer Basis
Es sei $(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0)_{-10} := \sum_{i=0}^{n-1} a_i(-10)^i$, wobei $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ sei für $i \in \{0, \dots, n-1\}$. $a_{n-1} \dots a_0$ heißt dann Darstellung von $\sum_{i=0}^{n-1} a_i(-10)^i$ zur Basis -10.
   (a) Schreiben Sie $(19375573910)_{-10}$ als Dezimalzahl.
   (b) Geben Sie eine Darstellung von $(9230753)_{10}$ zur Basis -10 an.
   (c) Zeigen Sie, dass es für jede ganze Zahl x eine Darstellung zur Basis -10 mit nichtnegativen Koeffizienten gibt, dass es also Zahlen $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ ($i \in \{0, \dots, n-1\}$) gibt, so dass $x = (a_{n-1} \dots a_0)_{-10}$ gilt. (8 Punkte)

5. (a) Schreiben Sie die Binärzahl 1001101 als Dezimalzahl.
   (b) Schreiben Sie die Hexadezimalzahl 2A50 als Binärzahl.
   (c) Schreiben Sie die Dezimalzahl 5837923123 als Hexadezimalzahl.
   (d) Schreiben Sie $(524316)_7$ als Zahl zur Basis 9. (8 Punkte)

Zulassungskriterien zur Klausur:

- Mindestens 50 % der erreichbaren Punkte in den Theorieübungen.
- Erfolgreiche Bearbeitung aller Programmieraufgaben.

Abgabe: Mittwoch, den 22.10.2008, **vor** der Vorlesung.