Wintersemester 2007/08 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Hougardy Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Betrachte eine Variante des Min-Cost-Flow-Problems, bei der unendliche Kapazitäten erlaubt sind.

   (a) Zeige, daß eine Instanz dieses Problems genau dann unbeschränkt ist, wenn sie zulässig ist und es einen negativen Kreis gibt, dessen Kanten alle unendliche Kapazität haben.

   (b) Zeige, daß man in Zeit $O(n^3)$ herausfinden kann, ob eine Eingabe unbeschränkt ist.

   (c) Zeige, daß in einer Eingabe, die nicht unbeschränkt ist, jede unendliche Kapazität äquivalent durch eine endliche Kapazität ersetzt werden kann. (4 Punkte)

2. VLSI-Partitioning: Betrachte das folgende Problem: Gegeben seien eine endliche Menge $\mathcal{C}$ von Schaltkreisen, eine endliche Menge $\mathcal{R}$ von Regionen sowie zwei Funktionen $\beta : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ und $\kappa : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$. Ferner gebe es Kosten $\mathrm{cost} : \mathcal{C} \times \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$. Es gelte

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \beta(c) \leq \sum_{r \in \mathcal{R}} \kappa(r).$$

   Gesucht ist $\gamma : \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+^{\mathcal{R}}$ mit:

   - $\sum_{r \in \mathcal{R}} \gamma(c)_r = \beta(c) \ \forall c \in \mathcal{C}$
   - $\left(\sum_{c \in \mathcal{C}} \gamma(c)\right)_r \leq \kappa(r) \ \forall \ r \in \mathcal{R}$
   - $\sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{r \in \mathcal{R}} \mathrm{cost}(c, r) \cdot \frac{\gamma(c)_r}{\beta(c)}$ minimal.

   Zeige:

   a) Das Problem läßt sich als Min-Cost-Flow-Problem formulieren.

   b) Es gibt eine Optimallösung γ, so daß es höchstens $|\mathcal{R}| - 1$ Schaltkreise $c \in \mathcal{C}$ gibt, für die gilt:

$$|\{r | \gamma(c)_r > 0\}| > 1.$$

   (4 Punkte)

bitte wenden

3. Betrachte die folgende Änderung des Minimum-Mean-Cycle-Cancelling-Algorithmus, bei der statt des Zykels minimalen Durchschnittsgewichts irgendein negativer Zykel gewählt werden kann. Zeige, daß dieser Algorithmus nicht notwendig terminiert. (4 Punkte)

4. Betrachte das folgende Problem: Gegeben sei ein stark zusammenhängender gerichteter Graph G mit nichtnegativen reellen Kantengewichten c. Gesucht ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so daß der Graph, der $f(e)$ Kopien von jedem $e \in E(G)$ und $V(G)$ als Knotenmenge enthält, Eulersch ist. Dabei soll $\sum_{e \in E(G)} c(e) f(e)$ minimiert werden. Man gebe einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem an. (4 Punkte)

Abgabe: Dienstag, den 29.1.2008, **vor** der Vorlesung.