Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 21. Dezember, vor der Vorlesung

Übungsblatt 9

Aufgabe 47:
Gegeben seien die LPs

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ \text{(LP)} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{lrcl} \max & c^T x & & \\ (\text{LP}_\Delta) & Ax & \leq & b + \Delta \\ & x & \geq & 0. \end{array}$$

x^* sei eine nicht entartete Ecke, die (LP) optimal löst mit Wert $z^* = c^T x^*$, π^* eine Ecke die das zu (LP) duale Programm optimal löst. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass (LP_Δ) für alle $\Delta \in \mathbb{R}^m$ mit $-\epsilon < \Delta_i < \epsilon, i = 1, \ldots, m$ eine Optimallösung mit Wert

$$z^* + {\pi^*}^T \Delta$$

besitzt.

(10 Punkte)

Aufgabe 48:
Gegeben sei ein Ellipsoid $E(A, x) \subset \mathbb{R}^n$ und eine Hyperebene $\{z \mid a^T z = a^T x\}$. Sei weiter der Ellipsoid $E(A', x')$ definiert durch

$$A' = \frac{n^2}{n^2 - 1} \left(A - \frac{2}{n+1} b b^T \right),$$

$$x' = x + \frac{1}{n+1} b$$

und

$$b = \frac{1}{\sqrt{a^T A a}} A a$$

Beweisen Sie, dass

$$E(A, x) \cap \{z \mid a^T z \geq a^T x\} \subseteq E(A', x')$$

(6 Punkte)

A. 49 →

Aufgabe 49:

a) Zeigen Sie: Sind $x_0, x_1, ..., x_n$ affin unabhängige Punkte des $\mathbb{R}^n$, dann ist

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, ..., x_n\})) = \frac{1}{n!}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}\right|$$

Hinweise:
Betrachten Sie zuerst den Einheitswürfel $W = \{x \mid 0 \leq x_i \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ und die Mengen $W_\pi = \{x \mid 1 \geq x_{\pi(1)} \geq x_{\pi(2)} \geq \ldots \geq x_{\pi(n)} \geq 0\}$ mit $\pi \in S_n$.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}(W) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{vol}(W_\pi)$ und berechen Sie $\mathrm{vol}(W_\pi)$.

Betrachten Sie weiter die Menge $W_1 = \mathrm{conv}(0, e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_2 + e_3 + \ldots + e_n\}$ und die affin lineare Abbildung $x \mapsto x_0 + Cx$, die definiert wird durch:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & x_0 \\ e_1 & \mapsto & x_1 \\ & \cdots & \\ e_1 + e_2 + \ldots + e_n & \mapsto & x_n \end{array}$$

Wie sieht die Matrix C aus?

Berechnen Sie mit Hilfe von W_1 und der Matrix C das Volumen von $\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, ..., x_n\})$.

b) Sei $P \subset \mathbb{R}^n$ ein volldimensionaler Polyeder. Für jede Ecke x sei $\mathrm{size}(x) \leq L$.
Zeigen Sie, dass $\mathrm{vol}(P) \geq \frac{1}{n!} 2^{-nL}$.

(10 Punkte)