Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 14. Dezember, vor der Vorlesung

Übungsblatt 8

Aufgabe 42: Beweisen Sie die folgende Aussagen:
Sind $x, y \in \mathbb{Q}^n$, so gilt

a) $\text{size}(x + y) \leq 2(\text{size}(x) + \text{size}(y))$

b) $\text{size}(x^T y) \leq 2(\text{size}(x) + \text{size}(y))$.

(6 Punkte)

Aufgabe 43:
Seien A eine Matrix und b ein Vektor mit rationalen Einträgen.
Zeigen Sie: Hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung, so besitzt es auch eine Lösung, deren Kodierungslänge polynomiell beschränkt in der Kodierungslänge von A und b ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 44:
Sei A eine Matrix und b ein Vektor mit rationalen Einträgen. Zeigen Sie, dass genau eine der beiden folgenden Alternativen eintritt:

- Es gibt einen Vektor x mit $Ax = b$ wobei die Kodierungslänge von x polynomiell in der Kodierungslänge von A und b beschränkt ist.
- Es gibt einen Vektor y mit $y^T A = 0$ und $y^T b = 1$ wobei die Kodierungslänge von y polynomiell in der Kodierungslänge von A und b beschränkt ist.

(6 Punkte)

A.45 + A.46 $\rightarrow$

In der Vorlesung haben Sie die **Kettenbruchentwicklung** kennengelernt:

Instanz: Eine rationale Zahl $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

Ausgabe: Eine Folge $(x_i = \frac{p_i}{q_i})_{i \geq 0}$ mit $x_0 = x$ und $x_{i+1} = \frac{1}{x_i - \lfloor x_i \rfloor}$ für $i \geq 0$.

1. Setze $i = 0$, $p_0 = p$ und $q_0 = q$.

   Setze $g_{-2} = 0$, $g_{-1} = 1$, $h_{-2} = 1$ und $h_{-1} = 0$.

2. Solange $q_i \neq 0$ setze

   $a_i = \lfloor \frac{p_i}{q_i} \rfloor$, $\quad g_i = a_i g_{i-1} + g_{i-2}$, $\quad h_i = a_i h_{i-1} + h_{i-2}$, $\quad q_{i+1} = p_i - a_i q_i$, $\quad p_{i+1} = q_i$ und $i = i + 1$.

Aufgabe 45: Beweisen Sie die folgenden Aussagen zur Kettenbruchentwicklung:

a) $x = \frac{p_i g_{i-1} + q_i g_{i-2}}{p_i h_{i-1} + q_i h_{i-2}}$ für $i \geq 0$.

b) $x \geq \frac{g_i}{h_i}$ für gerade i und $x \leq \frac{g_i}{h_i}$ für ungerade i.

(6 Punkte)

Aufgabe 46:

Sei h_i wie oben definiert. Zeigen Sie, dass $h_i \geq F_{i+1}\ \forall i$, wobei F_i die i-te Fibonacci Zahl ist ($F_1 = F_2 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 3$). Beachten Sie, dass folgende Gleichheit gilt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Folgern Sie, dass die Anzahl an Iterationen des Algorithmus zur Kettenbruchentwicklung $O(\log q)$ ist.

(6 Punkte)