Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 16. November, vor der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 22:
Zeigen Sie, dass jeweils genau eine der beiden Menge nicht leer ist

a) $\{x \mid Ax \leq b,\, x \geq 0\}$, $\{y \mid y^T A \geq 0,\, y \geq 0,\, y^T b < 0\}$

b) $\{x \mid Ax \geq 0,\, Ax \neq 0\}$, $\{y \mid y^T A = 0,\, y > 0\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 23:
Entscheiden Sie mit Hilfe der Fourier-Motzkin-Elimination, ob die folgenden linearen Ungleichungssyteme $A_i\, x \leq b_i$, $i \in \{1, 2\}$ eine Lösung besitzen. Wenn ja, dann geben Sie eine Lösung x an. Wenn nein, dann geben Sie ein y an, mit $y^T A_i = 0,\ y \geq 0,\ y^T b_i < 0$.

a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 24: (Motzkin's transposition theorem 1936)
Sind $A \in \mathbb{R}^{m_A \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m_B \times n}$, $a \in \mathbb{R}^{m_A}$ und $b \in \mathbb{R}^{m_B}$ so ist die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < a, Bx \leq b\}$ genau dann nicht leer, wenn für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^{m_A}_{\geq 0}$ und $z \in \mathbb{R}^{m_B}_{\geq 0}$ folgende Implikationen gelten:

(i) $y^T A + z^T B = 0 \Rightarrow y^T a + z^T b \geq 0$.

(i) $y^T A + z^T B = 0$ und $y \neq 0 \Rightarrow y^T a + z^T b > 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 25:
Beweisen Sie:
Das Duale des Dualen ist wieder das Primale.

(6 Punkte)

Aufgabe 26:
Gegeben sei das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{lrcr} \max & x_1 + x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Bestimmen Sie dazu das duale Programm (D) und zeigen Sie mit Hilfe eines Lemmas von Farkas, dass beide Polyeder P und D leer sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 27:
Gegeben sei das LP $\min\{c^T x \mid Ax = b\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Dualen, dass das LP entweder keine Lösung besitzt, unbeschränkt ist oder alle zulässigen Lösungen optimal sind. Gilt die Aussage auch noch, wenn man für das LP zusätzlich $x \geq 0$ fordert?

(6 Punkte)

Aufgabe 28:
Beschreiben Sie zu einem gegebenen System $Ax \leq b$ ein lineares Programm, aus dessen optimalen Lösungen man ablesen kann, welche der Ungleichungen in $Ax \leq b$ immer mit Gleichheit erfüllt sind.

(6 Punkte)