Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2004/2005
Abgabe: Dienstag, 26. Oktober, **im Sekretariat!**

Übungsblatt 2

Wichtige Hinweise:

- Die Vorlesung am 26.10 entfällt,
- die Lösungen für dieses Übungsblatt müssen deshalb bis zum 26.10 im Sekretariat abgegeben werden.
- Dort bekommen Sie dann auch die gedruckte Version von Übungsblatt Nr.3 - die digitale Version werden Sie wie gewohnt im Internet finden.

Aufgabe 7:

a) Bestimmen und zeichnen Sie für $S = \{(1,1),(1,-1)\} \subseteq \mathbb{K}^2$ die Mengen $\operatorname{lin}(S)$, $\operatorname{aff}(S)$ und $\operatorname{conv}(S)$. Was ändert sich, wenn zu S der Nullpunkt $(0,0)$ hinzugefügt wird?

b) Zeigen Sie, dass die affine Hülle von S der kleinste affine Raum ist, der S enthält.

c) Zeigen Sie: Die affine und die lineare Hülle von S sind genau dann gleich, wenn der Nullpunkt in $\operatorname{aff}(S)$ enthalten ist.

d) Zeigen Sie: Für jedes beliebige x aus der affinen Hülle von S gilt die Gleichheit $\operatorname{aff}(S) = x + \operatorname{lin}(S - x)$.

e) Welche der Relationszeichen $\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$ und $=$ können an Stelle der Zeichen $\diamondsuit$ und $\heartsuit$ eingesetzt werden, um die folgenden zwei Ausdrücke für alle Mengen S und T aus $\mathbb{K}^n$ in wahre Aussagen zu überführen?

(I) $\operatorname{conv}(S \cup T) \diamondsuit \operatorname{conv}(S) \cup \operatorname{conv}(T)$.

(II) $\operatorname{conv}(S \cap T) \heartsuit \operatorname{conv}(S) \cap \operatorname{conv}(T)$.

(6 Punkte)

A.8 - A.11 $\rightarrow$

Aufgabe 8:
Charakterisieren Sie alle Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $|M| < \infty$ mit:

$$\exists\, k \geq 0 : \ \tilde{M} = \{x \,|\, \exists\, y \in M : ||x - y|| \leq k\} \text{ konvex.}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 9:
Beweisen Sie:
Es existiert kein $M \subset \mathbb{R}^2$, $|M| < \infty$ mit $\text{conv}(M) = \{x \,|\, \|x\| \leq 1\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 10:
Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe und nicht-leere Menge und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

(i) Die Projektion von x auf C existiert und ist eindeutig bestimmt, d.h. es existiert ein eindeutiges $x_C \in C$ mit $||x - x_c|| = \inf\{||x - y|| \mid y \in C\}$.

(ii) Für alle $y \in C$ gilt $(x_C - x)^T(x_C - y) \leq 0$.

(iii) Für alle $y \in C$ gilt $\|x_C - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|x_C - x\|^2$

(6 Punkte)

Aufgabe 11:
Beweisen Sie den Satz von Cheney and Goldstein (1959): Es seien C und D zwei abgeschlossene und konvexe Mengen in $\mathbb{R}^n$ mit nicht-leerem Durchschnitt. Weiter seien $\pi_C : \mathbb{R}^n \to C$ und $\pi_D : \mathbb{R}^n \to D$ jeweils die Projektionen auf C und D. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und für $k \in \mathbb{N}$ sei $x_{k+1} = \pi_C(\pi_D(x_k))$.

(i) Zeigen Sie, daß die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gegen ein Element von $C \cap D$ konvergiert.

(ii) Ist der Grenzwert von $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Projektion von x_0 auf den $C \cap D$?

(10 Punkte)