Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2003/2004
Abgabe: Dienstag, 25. November, vor der Vorlesung

Übungsblatt 6

Aufgabe 25:
Lösen Sie das folgende LP mit der Tableaumethode: (bitte alle Tableaus angeben!)

$$\begin{array}{llllllll}
\min & -5x_1 & -4x_2 & & & & & \\
\text{s. t.} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = & 12 \\
 & 4x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = & 16 \\
 & x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = & 4 \\
 & & & & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 26:
Lösen Sie das folgende LP mit der Tableaumethode: (bitte alle Tableaus angeben!)

$$\begin{array}{lllll}
\max & 5x_1 & +4x_2 & & \\
\text{s. t.} & x_1 & +2x_2 & \leq & 6 \\
 & -2x_1 & +x_2 & \leq & 4 \\
 & 5x_1 & +3x_2 & \leq & 15 \\
 & & x_i & \geq & 0
\end{array}$$

(10 Punkte)

Aufgabe 27:
Falls nichts anderes gesagt wird, betrachten wir im folgenden immer ein LP in Standardform $\min c^T x$, s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rg(A) = m$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen, und machen Sie sich gegebenenfalls auch Gedanken darüber, welche *Teil*aussagen richtig oder falsch sind.

a) Eine Basislösung x_Z eines LPs in Standardform ist genau dann optimal, wenn für die zugehörigen reduzierten Kosten $p \geq 0$ gilt.

b) Z sei eine optimale Basisindexmenge eines LPs in Standardform. Verkleinert man nun den Wert einer Nichtbasisvariablen unter Null und passt die Werte der Basisvariablen vermöge der Gleichung $x_Z = A_Z^{-1} b - Q x_{NZ}$ an, so steigt der Zielfunktionswert.

c) Ist x eine nicht zulässige Basislösung und gilt für die zugehörigen reduzierten Kosten $p \geq 0$, so ist $c^T x \leq c^T y$ für alle zulässigen Lösungen y.

d) Hat das LP $\min c^T x$ s. t. $Ax = b$, $x \geq 0$ einen endlichen Optimalwert, so ist das LP $\min c^T x$ s. t. $Ax = b'$, $x \geq 0$ für alle b' beschränkt.

e) Die Anzahl positiver x_j in einer zulässigen Basislösung überschreitet nicht den Rang der Matrix A.

f) Die Anzahl der Optimallösungen sowie der zulässigen Basislösungen sind endlich.

g) Zu jedem LP in n unbeschränkten Variablen gibt es ein äquivalentes LP in $n+1$ nichtnegativen Variablen.

h) Die beiden LPs $\min c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ und $\min -c^T x$, s. t. $Ax \leq b$ können beide zulässige Lösungen mit beliebig großem Zielfunktionswert haben.

(10 Punkte)

Aufgabe 28:
Zeigen Sie: Verlässt im Simplexverfahren ein Index j die Basisindexmenge, dann kann er in der nächsten Iteration nicht wieder zur Basisindexmenge hinzukommen.

(5 Punkte)

Aufgabe 29:
Gegeben sei folgendes LP: $\min c^T x$, s.d. $Ax = b$, $x \geq 0$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $rg(A) = m$. Ferner sei eine optimale Lösung mit Basisindexmenge Z gegeben. Nun ersetzten wir b durch $b + \lambda d$ mit λ Skalar und $0 \neq d \in \mathbb{R}^m$. Unter welchen Voraussetzungen ist die Basisindemenge Z optimal für alle $\lambda \geq 0$?

(5 Punkte)