Innere-Punkt-Methoden

Primales und duales LP:

$$\text{(P):} \qquad \begin{aligned} & \max c^t x \\ \text{s.t.} \quad Ax + s &= b \\ s &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{(D):} \qquad \begin{aligned} & \min b^t y \\ \text{s.t.} \quad A^t y &= c \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Wir berechnen eine Lösung des dualen LPs.

Neue Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
Ax + s &= b \\
A^t y &= c \\
\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 &\leq \frac{1}{4} \qquad (*) \\
y &> 0 \\
s &> 0
\end{aligned}
$$

Allgemeine Strategie:

(I) Berechne eine Startlösung von (einer modifizierten Version von) (**??**): ✓

(II) Verringere μ um einen konstanten Faktor und passe x, y und s an den neuen Wert von μ an, sodass wieder eine Lösung von of (**??**) entsteht.
Iteriere den Schritt, bis μ klein genug ist.

(III) Berechne eine Optimallösung des duale LPs.

Schritt (II): Verkleinere μ:

Annahme: Wir haben eine Lösung $\mu^{(k)}, x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}$ von

$$\begin{array}{rcl} \tilde{A}x + s & = & \tilde{b} \\ \tilde{A}^t y & = & \tilde{c} \\ \sum_{i=1}^{m+2} \left(\frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 & \leq & \frac{1}{4} \\ y & > & 0 \\ s & > & 0 \end{array}$$

Ziel: Finde Lösung $\mu^{(k+1)}, x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}$ mit $\mu^{(k+1)} = (1 - \delta)\mu^{(k)}$ ($\delta \in (0, 1)$ wird später bestimmt).

Schritt (II): Verkleinere μ:

Annahme: Wir haben eine Lösung $\mu^{(k)}, x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}$ von

$$\begin{aligned}
\tilde{A}x + s &= \tilde{b} \\
\tilde{A}^t y &= \tilde{c} \\
\sum_{i=1}^{m+2} \left(\frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 &\leq \frac{1}{4} \\
y &> 0 \\
s &> 0
\end{aligned}$$

Ziel: Finde Lösung $\mu^{(k+1)}, x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}$ mit $\mu^{(k+1)} = (1-\delta)\mu^{(k)}$ ($\delta \in (0,1)$ wird später bestimmt).

Notation:

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + f$
- $y^{(k+1)} = y^{(k)} + g$
- $s^{(k+1)} = s^{(k)} + h$

Schritt (II): Verkleinere μ:

Annahme: Wir haben eine Lösung $\mu^{(k)}, x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}$ von

$$\begin{aligned} \tilde{A}x + s &= \tilde{b} \\ \tilde{A}^t y &= \tilde{c} \\ \sum_{i=1}^{m+2} \left(\frac{y_i s_i}{\mu} - 1 \right)^2 &\leq \frac{1}{4} \\ y &> 0 \\ s &> 0 \end{aligned}$$

Ziel: Finde Lösung $\mu^{(k+1)}, x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}$ mit $\mu^{(k+1)} = (1-\delta)\mu^{(k)}$ ($\delta \in (0,1)$ wird später bestimmt).

Notation:

- $x^{(k+1)} = x^{(k)} + f$
- $y^{(k+1)} = y^{(k)} + g$
- $s^{(k+1)} = s^{(k)} + h$

$\Rightarrow$

- $\tilde{A}^t g = 0$
- $\tilde{A} f + h = 0$

Schritt (II): Verkleinere μ:

Wir wollen $y_i^{(k+1)} s_i^{(k+1)}$ nahe an $\mu^{(k+1)}$ haben.

Es gilt

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} s_i^{(k+1)} &= (y_i^{(k)} + g_i)(s_i^{(k)} + h_i) \\ &= y_i^{(k)} s_i^{(k)} + g_i s_i^{(k)} + y_i^{(k)} h_i + g_i h_i \end{aligned}$$

Wir fordern $y_i^{(k)} s_i^{(k)} + g_i s_i^{(k)} + y_i^{(k)} h_i = \mu^{(k+1)}$

Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^t g &= 0 \\ \tilde{A} f + h &= 0 \\ s_i^{(k)} g_i + y_i^{(k)} h_i &= \mu^{(k+1)} - y_i^{(k)} s_i^{(k)} \qquad i = 1, \ldots, m+2 \end{aligned} \qquad (**)$$