Algorithm 1: Idealized Ellipsoid Algorithm

```
Input: A separation oracle for a closed convex set $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a number
       $R > 0$ with $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, and a number $\epsilon > 0$.
Output: An $x \in K$ or the message "vol($K$) $< \epsilon$".
$p_0 := 0$, $A_0 := R^2 I_n$;
for $k = 0, \dots, N(R, \epsilon) := \lfloor 2(n+1)(n \ln(2R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})) \rfloor$ do
    if $p_k \in K$ then
        return $p_k$;
    Let $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ be a vector with $\bar{a}^t y > \bar{a}^t p_k$ for all $y \in K$;
    $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$;
    $p_{k+1} := p_k + \frac{1}{n+1} b_k$;
    $A_{k+1} := \frac{n^2}{n^2-1}(A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t)$;
return "vol($K$) $< \epsilon$";
```

Algorithm 2: Ellipsoid Algorithm

```
Input: A separation oracle for a closed convex set $K \subseteq \mathbb{R}^n$, a number
       $R > 0$ with $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, and a number $\epsilon > 0$
Output: An $x \in K$ or the message "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$".
$p_0 := 0$, $A_0 := R^2 I_n$;
for $k = 0, \ldots, N(R, \epsilon) := \lceil 8(n+1)(n \ln(2R) + \ln(\frac{1}{\epsilon})) \rceil$ do
    if $p_k \in K$ then
        return $p_k$;
    Let $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ be a vector with $\bar{a}^t y > \bar{a}^t p_k$ for all $y \in K$;
    $b_k := \frac{A_k \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^t A_k \bar{a}}}$;
    $p_{k+1}$ an approximation of $\widetilde{p_{k+1}} := p_k + \frac{1}{n+1} b_k$ with maximum error $\delta < \left(2^{6(N(R,\epsilon)+1)} 16 n^3\right)^{-1}$;
    $A_{k+1}$ a symmetric approximation of $\widetilde{A_{k+1}} := \left(1 + \frac{1}{2n(n+1)}\right) \frac{n^2}{n^2-1} (A_k - \frac{2}{n+1} b_k b_k^t)$ with maximum error $\delta$;
return "$\mathrm{vol}(K) < \epsilon$";
```

Unser Ziel ist δ so zu wählen, dass:

- $2\sqrt{n}\delta \, \|\widetilde{A_k}^{-1}\| \, (R + \|\widetilde{p_k}\|) + n\delta^2\|\widetilde{A_k}^{-1}\| + (R + \|p_k\|)^2 \, \|A_k^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A_k}^{-1}\| n\delta \quad \leq \quad \frac{1}{4n^2}$
- $\delta\|\widetilde{A_{k+1}}^{-1}\| \quad \leq \quad \frac{1}{4(n+1)^3}$

Theorem

Für eine kompakte konvexe Menge $K \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t x \leq R^2\}$, die durch ein Separationsorakel gegeben ist, findet die ELLIPSOID-METHODE entweder einen Vektor $x \in K$ oder gibt die Meldung “$\mathrm{vol(K)} \leq \epsilon$” aus. Sie benötigt $O\left(n\left(n \ln R + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Iterationen, und in jeder Iteration werden ein Orakelaufruf, die approximative Berechnung einer Quadratwurzel und $O(n^2)$ arithmetische Operationen auf $O\left(n\left(n \ln R + \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)\right)$ Bits ausgeführt.

☐