Das Simplex-Tableau

Lemma:

Für jede zulässige Basis B gibt es ein Simplex-Tableau $T(B)$.

Beweis: Setze

- $p = A_B^{-1} b$,
- $Q = -A_B^{-1} A_N$,
- $r = c_N - (c_B^t A_B^{-1} A_N)^t$, und
- $z_0 = c_B^t A_B^{-1} b$.

Dann gilt:

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \quad \Leftrightarrow \quad A_B x_B = b - A_N x_N \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b.$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} z &= c_B^t A_B^{-1} b + (c_N^t - (c_B^t A_B^{-1} A_N)) x_N \\ &= c_B^t A_B^{-1} (b - A_N x_N) + c_N^t x_N = c_B^t A_B^{-1} A_B x_B + c_N^t x_N \\ &= c_B^t x_B + c_N^t x_N = c^t x. \end{aligned}$$

□

Optimalitätskriterium:

•

Lemma

Sei $T(B)$:

$$\begin{array}{cccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

ein Simplextableau für eine zulässige Basis B. Falls $r \leq 0$, dann ist die Basislösung zu B optimal.

Beweis: Sei x die Basislösung von B.
Wegen $x_N = 0$ gilt $c^t x = z_0 (= c_B^t A_B^{-1} b)$.
Wenn x^* irgendeine zulässige Lösung mit Wert $z^* = c^t x^*$ ist, dann bilden x^* und z^* auch eine Lösung von $T(B)$, und es gilt (wegen $r \leq 0$ und $x_N^* \geq 0$):

$$z^* = z_0 + r^t x_N^* \leq z_0 = c^t x.$$

□

Das Erkennen unbeschränkter Instanzen

Lemma

Sei $T(B)$:

$$\begin{array}{cccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

ein Simplextableau für eine zulässige Basis B. Wenn es ein $\alpha \in N$ mit $r_\alpha > 0$ gibt, sodass die Spalte von Q mit Index α nur nicht-negative Einträge enthält, dann ist das zugehörige LP unbeschränkt.

Das Erkennen unbeschränkter Instanzen

Lemma

Sei $T(B)$:

$$\begin{array}{ccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

ein Simplextableau für eine zulässige Basis B. Wenn es ein $\alpha \in N$ mit $r_\alpha > 0$ gibt, sodass die Spalte von Q mit Index α nur nicht-negative Einträge enthält, dann ist das zugehörige LP unbeschränkt.

Beweis: Sei x die zulässige Basislösung für B.
Sei $K \in \mathbb{R}$ mit $K > c^t x$ eine Konstante.
Definiere wie folgt eine neue zulässige Lösung $\tilde{x}$:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \frac{K - c^t x}{r_\alpha} & \text{für } i = \alpha \\ x_i & \text{für } i \in N \setminus \{\alpha\} \\ p_i + q_{i\alpha}\tilde{x}_\alpha & \text{für } i \in B \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist eine zulässige Lösung mit $c^t \tilde{x} \geq K$.
$\Rightarrow$ Das LP ist unbeschränkt. □

Austauschschritt

Lemma

Sei $T(B)$:

$-A_B^{-1} A_N$

$$\begin{array}{cccc} x_B = p + Qx_N \\ \hline z = z_0 + r^t x_N \end{array}$$

ein Simplextableau für eine zulässige Basis B. Sei $\alpha \in N$ ein Index mit $r_\alpha > 0$ und $\beta \in B$ mit $q_{\beta\alpha} < 0$ und $\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} = \max\{\frac{p_i}{q_{i\alpha}} \mid q_{i\alpha} < 0, i \in B\}$. Dann ist $\tilde{B} = (B \cup \{\alpha\}) \setminus \{\beta\}$ ein zulässige Basis.

Beweis: z.z. $A_{\hat{B}}$ ist regulär und die zugehörige Basislösung ist zulässig.

(i) $\hat{B}$ ist Basis:

Zeige $A_B^{-1} A_{\hat{B}}$ ist regulär

Alle Spalten von $A_{\hat{B}}$ bis auf eine gehören zu A_B. $\rightarrow$ $A_B^{-1} A_{\hat{B}}$ entsteht aus der $m \times m$-Einheitsmatrix, indem eine Spalte ersetzt wird

$$A_B^{-1} A_{\hat{B}}: \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die einzige Spalte von $A_B^{-1} A_{\tilde{B}}$, die kein Einheitsvektor ist ist $A_B^{-1} a_{\cdot\alpha}$, wobei $a_{\cdot\alpha}$ die Spalte von A mit Index α sei. Das ist die Spalte mit Index α von $-Q = A_B^{-1} A_N$. Es gilt $q_{\beta\alpha} \neq 0$, daher hat die Matrix $A_B^{-1} A_{\tilde{B}}$ an der Stelle mit Zeilenindex β und Spaltenindex α einen von 0 verschiedenen Eintrag $\Rightarrow A_B^{-1} A_{\tilde{B}}$ ist regulär.

(ii) z.z.: Die Basislösung von $\bar{B}$ ist nicht-negativ.

Wir erhöhen x_α auf $-\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}}$ und setzen die Basisvariablen x_B auf $p - q_{\cdot\alpha}\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}}$, wobei $q_{\cdot\alpha}$ die Spalte mit Index α von Q sei.

Für $i \in B$ mit $q_{i\alpha} \geq 0$ (insbesondere $i \neq \beta$) gilt $p_i - q_{i\alpha}\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} \geq p_i \geq 0$

Für $i \in B$ mit $q_{i\alpha} < 0$ gilt

$\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} \geq \frac{p_i}{q_{i\alpha}} \Rightarrow p_i \geq q_{i\alpha}\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}}$ mit Gleichheit, wenn $i=\beta$

$$\Longrightarrow \quad p_i - q_{i\alpha} \frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} \geq 0 \quad \text{und} \quad = 0 \quad \text{für} \quad i = \beta.$$

$\Longrightarrow$ Damit ist $x_\beta = 0$ und $x_{\tilde{\beta}} \geq 0$.

$\Longrightarrow$ wir haben eine zulässige Basislösung zu $\tilde{B}$. $\square$

The Simplex Algorithm

Algorithm 1: Simplex Algorithm

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, and $c \in \mathbb{R}^n$

Output: $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ maximizing $c^t x$ or the message that $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ is unbounded or infeasible

1 Compute a feasible basis B;

2 If no such basis exists, stop with the message "INFEASIBLE";

3 Set $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$ and compute the feasible basic solution x for B;

4 Compute the simplex tableau $\begin{array}{ccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$ for B;

5 **if** $r \leq 0$ **then**

  return $\tilde{x} = x$;

6 Choose $\alpha \in N$ with $r_\alpha > 0$;

7 **if** $q_{i\alpha} \geq 0$ **for all** $i \in B$ **then**

  return "UNBOUNDED";

8 Choose $\beta \in B$ with $q_{\beta\alpha} < 0$ and $\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} = \max\{\frac{p_i}{q_{i\alpha}} \mid q_{i\alpha} < 0, i \in B\}$;

9 Set $B = (B \setminus \{\beta\}) \cup \{\alpha\}$;

10 GOTO line 3;

The Simplex Algorithm

Algorithm 2: Simplex Algorithm

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, and $c \in \mathbb{R}^n$

Output: $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ maximizing $c^t x$ or the message that $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ is unbounded or infeasible

1 Compute a feasible basis B;

2 If no such basis exists, stop with the message "INFEASIBLE";

3 Set $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$ and compute the feasible basic solution x for B;

4 Compute the simplex tableau $\begin{array}{cccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$ for B;

5 **if** $r \leq 0$ **then**
   return $\tilde{x} = x$;

6 Choose $\alpha \in N$ with $r_\alpha > 0$;

7 **if** $q_{i\alpha} \geq 0$ **for all** $i \in B$ **then**
   return "UNBOUNDED";

8 Choose $\beta \in B$ with $q_{\beta\alpha} < 0$ and $\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} = \max\{\frac{p_i}{q_{i\alpha}} \mid q_{i\alpha} < 0, i \in B\}$;

9 Set $B = (B \setminus \{\beta\}) \cup \{\alpha\}$;

10 GOTO line 3;

The Simplex Algorithm

Algorithm 3: Simplex Algorithm

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, and $c \in \mathbb{R}^n$

Output: $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ maximizing $c^t x$ or the message that $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ is unbounded or infeasible

1 Compute a feasible basis B;

2 If no such basis exists, stop with the message "INFEASIBLE";

3 Set $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$ and compute the feasible basic solution x for B;

4 Compute the simplex tableau $\begin{array}{ccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$ for B;

5 **if** $r \leq 0$ **then**
  return $\tilde{x} = x$;

6 Choose $\alpha \in N$ with $r_\alpha > 0$;

7 **if** $q_{i\alpha} \geq 0$ **for all** $i \in B$ **then**
  return "UNBOUNDED";

8 Choose $\beta \in B$ with $q_{\beta\alpha} < 0$ and $\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} = \max\{\frac{p_i}{q_{i\alpha}} \mid q_{i\alpha} < 0, i \in B\}$;

9 Set $B = (B \setminus \{\beta\}) \cup \{\alpha\}$;

10 GOTO line 3;

Berechnung einer Startlösung

Idee: Wir berechnen die Startlösung des SIMPLEX-ALGORITHMUS mit dem SIMPLEX-ALGORITHMUS selbst.

O.B.d.A.: $b \geq 0$ (sonst multiplizieren wir Gleichungen geeignet mit -1).

Setze $\tilde{A} = (A \mid I_m)$, füge neue Variablen $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ hinzu, und löse (mit $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n+m})$) das folgende LP $(\tilde{P})$:

$$\begin{array}{rl} \max & -(x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m}) \\ \text{s.t.} & \tilde{A}\tilde{x} = b \\ & \tilde{x} \geq 0 \end{array}$$

Für $(\tilde{P})$ ist $\{n+1, \ldots, n+m\}$ eine zulässige Basis.

$\Rightarrow$ $(\tilde{P})$ kann mit dem SIMPLEX-ALGORITHMUS gelöst werden.

Falls der Lösungswert von $(\tilde{P})$ negativ ist, hat das ursprüngliche LP keine zulässige Lösung.

Andernfalls liefert der SIMPLEX-ALGORITHMUS ein Basislösung. Da in ihr $x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{n+m} = 0$ gilt, können wir daraus leicht eine zulässige Basislösung des ursprünglichen LPs machen.

Pivotregeln

Regeln, die spezifizieren, welche Variablen in einem Austauschschritt die Basis betreten bzw. verlassen, heißen **Pivotregeln**.

Beispiele:

- **Largest coefficient rule**: Wähle α so, das r_α maximiert wird (Dantzig ussprüngliche Wahl).
- **Largest increase rule**: Wähle alle Variablen so, dass der Anstieg der Zielfunktion maxinmiert wird (recht aufwendig zu überprüfen).
- **Steepest edge rule:** Wähle α so, dass

  $$\frac{c^t(x_{new} - x_{old})}{||x_{new} - x_{old}||}$$

  maximiert wird, wobei x_{old} die aktuelle Basislösung und x_{new} die neue Basislösung ist (auch recht zeitaufwendig, aber gut in der Praxis).

Terminierung

Ziel:

Finde Pivotregeln, die erzwingen, dass der SIMPLEX-ALGORITHMUS terminiert.

Wenn der Algorithmus nicht terminiert, betrachtet er eine Basis B zweimal (und damit auch unendlich oft). Das Verhalten heißt **Kreiseln**.

Die Berechnung zwischen zwei Vorkommen von B nennen wir **Kreis**. Seien $F \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Indizes der Variablen, die während ein Kreises zur Basis hinzugefügt (und dahr auch wieder entfernt werden). Wir nnen x_F die **Kreisvariablen**.

Terminierung

Lemma

Wenn SIMPLEX-ALGORITHMUS kreiselt, sind alle Basislösungen während des Kreiselns identisch und alle Kreisvariablen sind 0.

Terminierung

Lemma

Wenn SIMPLEX-ALGORITHMUS kreiselt, sind alle Basislösungen während des Kreiselns identisch und alle Kreisvariablen sind 0.

Beweis: Der Lösungswert wird während des Algorithmus nie kleiner.
$\Rightarrow$ Während des Kreiseln kann er auch nicht größer werden.
Sei B eine Basis während des Kreiseln und $(B \cup \{\alpha\}) \setminus \{\beta\}$ die nächste Basis.

Unter den Nicht-Basisvariablen könnte dabei höchstens x_α größer werden.
Aber: Wegen $r_\alpha > 0$ würde das den Lösungswert erhöhen.
$\Rightarrow$ Alle Nicht-Basisvariablen bleiben 0.

Die Nicht-Basisvariablen bestimmen die gesamte Lösung.
$\Rightarrow$ Alle Variablen bleiben unverändert. $\square$

Bland-Regel

Bland-Regel

- Den Variablenindex $\alpha \in N$, der die Basis betritt, wählen wir aus allen Elementen von N mit $r_\alpha > 0$ so, dass α minimal ist.
- Den Variablenindex β, der die Basi verläßt, wählen wir aus allen Elementen von B mit $q_{\beta\alpha} < 0$ und $\frac{p_\beta}{q_{\beta\alpha}} = \max\{\frac{p_i}{q_{i\alpha}} \mid q_{i\alpha} < 0, i \in B\}$ so, dass β minimal ist.

Keine besonders intelligente Wahl von α und β, aber gut genug um eine Terminierung zu erzwingen.

Bland-Regel

Theorem

Mit den Bland-Regel als Pivotregel terminiert der SIMPLEX-ALGORITHMUS nach endlich vielen Schritten.

Beweis: Annahme: Der Algorithmus kreiselt mit der Bland-Regel.
Sei F die Indexmenge der Kreiselvariablen.

Sei $\pi = \max(F)$, und sei B die Basis unmittelbar, bevor π sie betritt.
Sei $T(B)$ wie folgt:
$$\begin{array}{cccccc} x_B & = & p & + & Qx_N \\ \hline z & = & z_0 & + & r^t x_N \end{array}$$

Sei B' die Basis unmittelbar, bevor π sie verlässt.
Sei $T(B')$ wie folgt:
$$\begin{array}{cccccc} x_{B'} & = & p' & + & Q' x_{N'} \\ \hline z & = & z'_0 & + & r'^t x_{N'} \end{array}$$

Nach der Bland-Regel wählen wir stets den kleinsten möglichen Index.
$\Rightarrow$ Wenn $\pi = \max(F)$ ausgesucht wird, ist π der einzige Kandidat in F, der B betreten kann.
Also:

$$r_\pi > 0 \text{ und } r_j \leq 0 \text{ für } j \in N \cap (F \setminus \{\pi\}). \tag{14}$$

Sei α der Index, der B' betritt.
Bland-Rule $\Rightarrow$ $\pi = \max(F)$ ist der einzige Kandidat aus F, der B' verlassen kann. Wegen $p'_j = 0$ für alle $j \in B' \cap F$ folgt:

$$q'_{\pi\alpha} < 0 \text{ und } q'_{j\alpha} \geq 0 \text{ für } j \in B' \cap (F \setminus \{\pi\}). \tag{15}$$

Betrachte das folgende Hilfs-LP $(\tilde{P})$:

$$\begin{array}{lrcl} \max & c^t x & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b \\ & x_{F\setminus\{\pi\}} & \geq & 0 \\ & x_\pi & \leq & 0 \\ & x_{N\setminus F} & = & 0 \end{array}$$

Beachte: Keine Bedingungen an die Vorzeichen der Variablen in $x_{B\setminus F}$.

Behauptung 1: Das LP $(\tilde{P})$ hat eine Optimallösung.

Beweis von Behauptung 1: Sei $\tilde{x}$ die zulässige Basislösung (des ursprünglichen LPs) zur Basis B.
Es gilt $\tilde{x}_\pi = 0$. $\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist ein zulässige Lösung von $(\tilde{P})$.

Die Kosten einer Lösung x von $Ax = b$ sind $c^t x = z_0 + r^t x_N$.
Für jede Lösung x von $(\tilde{P})$ gilt:

$$x_j \begin{cases} \geq 0 & \text{if } j \in F \setminus \{\pi\} \\ \leq 0 & \text{if } j = \pi \end{cases}$$

$\overset{(14)}{\Rightarrow}$ $r_j x_j \leq 0$ für alle $j \in F$.
Wegen $x_{N \setminus F} = 0$ folgt $r^t x_N \leq 0$ für jede Lösung x von $(\tilde{P})$.
$\Rightarrow$ Der Wert jeder Lösung von $(\tilde{P})$ ist höchstens z_0.
$\Rightarrow$ $\tilde{x}$ ist eine Optimallösung von $(\tilde{P})$.
$\Rightarrow$ Behauptung 1

Behauptung 2: Das LP $(\tilde{P})$ ist unbeschränkt.

Beweis von Behauptung 2:
Wir haben beim Kreiseln immer dieselbe Basislösung.
$\Rightarrow$ Eine Basislösung $\tilde{x}$ (des ursprünglichen LPs) zur Basis B ist auch eine zulässige Basislösung zur Basis B'.

Wähle $K > 0$ und setze $x'_\alpha = K$. Für $j \in N' \setminus \{\alpha\}$ setze $x'_j = \tilde{x}_j = 0$.
Und wir setzen $x_{B'} = p' + Q' x'_{N'}$.

$\overset{(15)}{\Rightarrow}$ Dies definiert eine zulässige Lösung von $(\tilde{P})$.

Weil α die Basis B' betreten konnte, gilt $r'_\alpha > 0$.
$\Rightarrow$ Wir haben ein Lösung mit Wert $c^t x' = z'_0 + r'^t x'_{N'} = z'_0 + K \cdot r'_\alpha$.

K kann beliebig groß gewählt werden. $\Rightarrow$ $(\tilde{P})$ ist unbeschränkt.
$\Rightarrow$ Behauptung 2

Zusammen ergeben Behauptung 1 und 2 einen Widerspruch. $\square$