Definition

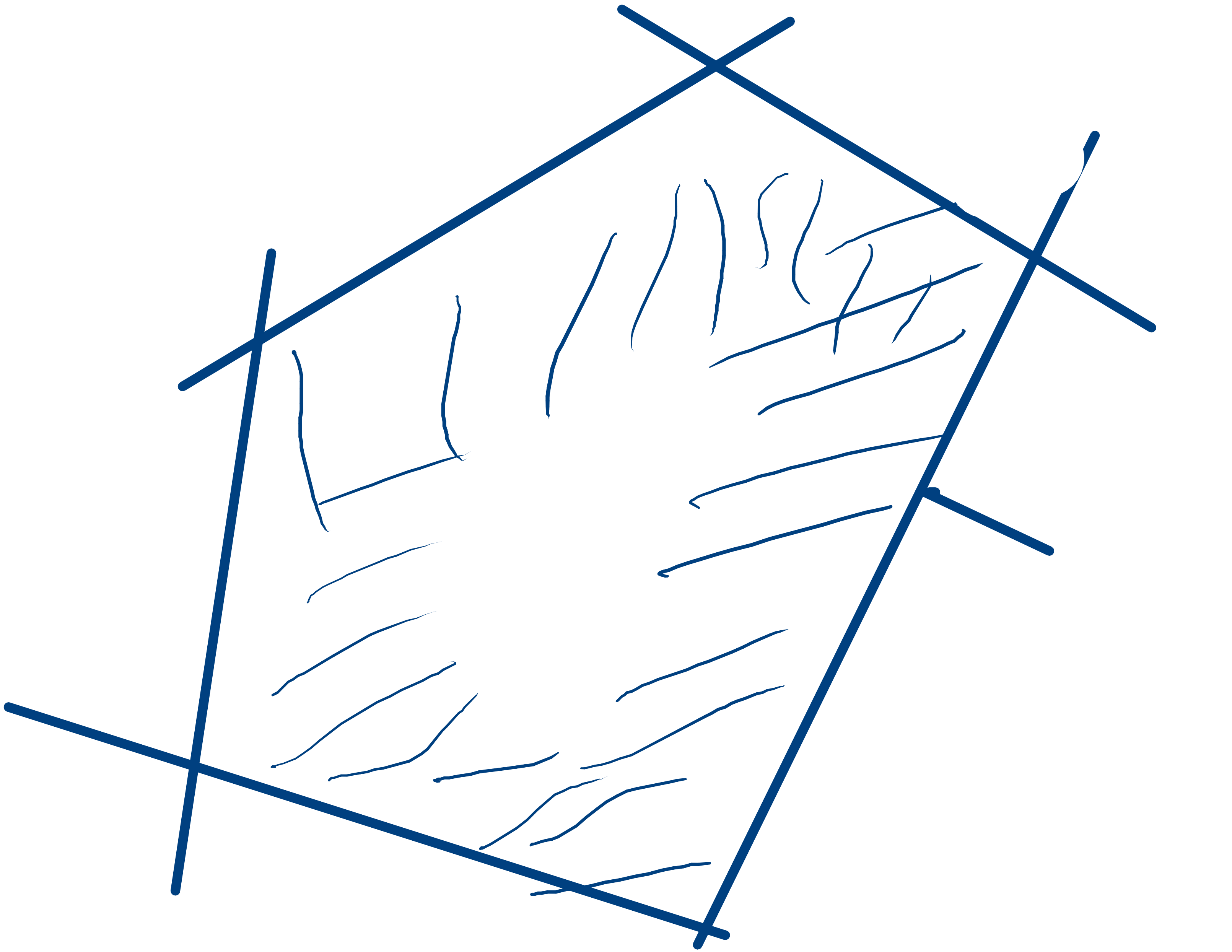
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(a) X heißt **Halbraum**, wenn es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x \leq b\}$ gibt. Der Vektor a heißt dann **Normalenvektor** von X.

(b) X heißt **Hyperebene**, wenn es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = b\}$ gibt. Der Vektor a heißt dann **Normalenvektor** von X.

(c) X heißt **Polyeder**, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ mit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ gibt.

(d) X heißt **Polytop**, wenn es ein Polyeder ist und es eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $||x|| \leq K$ für alle $x \in X$ gilt.



Beispiele:

- $\emptyset = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0^t x \leq -1\}$ ist ein Polytop.
- $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0^t x \leq 0\}$ ist ein Polyeder

Beobachtung: Polyeder sind konvex und abgeschlossen.

Lemma

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Polyeder, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

- $X = \mathbb{R}^n$
- X ist der Schnitt von endlich vielen Halbräumen.

Beweis: „$\Leftarrow$": trivial.

„$\Rightarrow$": Sei $X = \mathbb{R}^n$ ein Polyeder.

Fall $X = \emptyset$, dann $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{1}_n^t x \leq -1\}$

$\cap \{x \in \mathbb{R}^n : -\mathbb{1}_n^t x \leq -1\}$

Also sei X weder $\mathbb{R}^n$ noch $\emptyset$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix und

$b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

Es seien $a_1, \dots, a_m$ die Zeilen von

A, und es seien $b_1, \dots, b_m$ die

Einträge von b.

Falls $a_j = 0$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$, dann gilt $b_j \geq 0$ (sonst wäre $X = \emptyset$).

$$\Longrightarrow: \quad X = \bigcap_{j=1}^{m} \{x \in \mathbb{R}^n : a_j x \leq b_j\}$$

$$= \bigcap_{\substack{j=1,\dots,m \\ a_j \neq 0}} \{x \in \mathbb{R}^n : a_j x \leq b_j\}$$

$\square$

Definition

Die **Dimension** einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\dim(X) = n - \max\{rank(A) \mid A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ with } Ax = Ay \text{ für alle } x, y \in X\}.$$

Äquivalente Charakterisierung (Beweis: Übung):
Die Dimension einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist das größte d, für das X Elemente $v_0, v_1, \ldots, v_d$ enthält, sodass die Vektoren $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0, \ldots, v_d - v_0$ linear unabhängig sind.

Definition

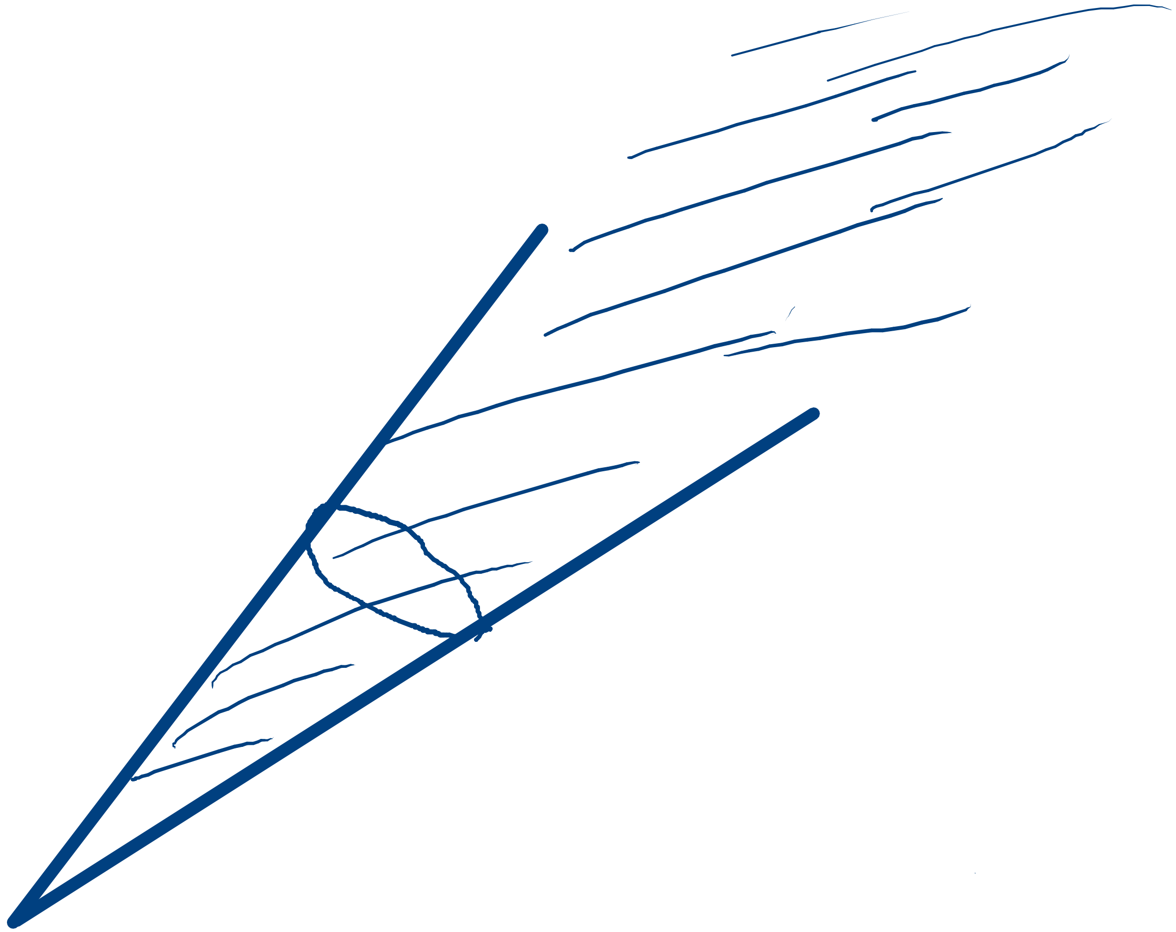
Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvexer Kegel** (convex cone), wenn $X \neq \emptyset$ und für alle $x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $\lambda x + \mu y \in X$.

X konvexer Kegel $\Longrightarrow 0 \in X$

Beobachtung: Eine nichtleere Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn X konvex ist und für alle $x \in X$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ auch $\lambda x \in X$ gilt.

Definition

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **polyedrische Kegel** (polyhedral cone), wenn sie ein Polyeder und ein konvexer Kegel ist.



Lemma

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein polyedrischer Kegel, wenn es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt, sodass $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$.

Beweis: „$\Leftarrow$": Sei $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$.

$\Longrightarrow$ X ist Polyeder, $X \neq \emptyset$ ($0 \in X$)

wenn $x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, dann

$A(\lambda x + \mu y) \leq 0$, also $\lambda x + \mu y \in X$

„$\Rightarrow$": Sei X ein polyedrischer Kegel.

$\Rightarrow$ Es gibt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit

$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

$0 \in X \Rightarrow$ kein Eintrag von b kann negativ sein

$\Rightarrow X \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$

Wenn es einen Vektor $x \in X$ gibt, sodass Ax einen positiven i-ten Eintrag dann hat für hinreichend großes λ

λx einen i-ten Eintrag, der größer ist als b_i. $\Longrightarrow \lambda x \notin X$

Widerspruch zur Annahme, das X ein konvexer Kegel ist.

$\Rightarrow X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$. $\square$

Notation:

Es seien $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Der von $x_1, \dots, x_m$ **erzeugte Kegel** ist

$$\operatorname{cone}(\{x_1, \dots, x_m\}) := \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0 \right\}.$$

Ein konvexer Kegel C heißt **endlich erzeugt**, wenn es endliche viele Vektoren $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ mit $C = \operatorname{cone}(\{x_1, \dots, x_m\})$ gibt.

Beobachtung: $\operatorname{cone}(\{x_1, \dots, x_m\})$ ist tatsächlich ein konvexer Kegel.

Wir werden sehen: Ein konvexer Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.

Dualität

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Ziel: Finde eine obere Schranke für den Wert einer Optimallösung.

$$12x_1 + 10x_2 = 2(4x_1 + 2x_2) + \frac{1}{2}(8x_1 + 12x_2)$$
$$\leq 2 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 7 = 13,5$$

$$12x_1 + 10x_2 = \frac{7}{6}(8 \cdot x_1 + 12x_2) + \frac{4}{3}(2x_1 - 3x_2)$$
$$\leq \frac{7}{6} \cdot 5 + \frac{4}{3} \cdot 1 = 9,5$$

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Allgemeiner Ansatz: Finde Zahlen $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$12x_1 + 10x_2 = u_1 \cdot (4x_1 + 2x_2) + u_2 \cdot (8x_1 + 12x_2) + u_3 \cdot (2x_1 - 3x_2).$$

$12 = 4u_1 + 8u_2 + 2u_3 \quad , \quad 10 = 2u_1 + 12u_2 - 3u_3$

$\Rightarrow 5u_1 + 7u_2 + u_3$ ist eine obere Schranke für den Wert von jeder Lösung von (P).

$\Rightarrow$ Wähle u_1, u_2, u_3 so, dass $5u_1 + 7u_2 + u_3$ minimiert wird.

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
& \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
& \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.d.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & 1u_3 & & \\
& \text{s.d.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
& \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
& & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
& & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcl}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
& \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
& & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
& & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
& & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
& & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Dualität: Beispiel

$$
\begin{array}{llrcrcr}
\text{(P)} & \max & 12x_1 & + & 10x_2 & & \\
 & \text{s.t.} & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & & 8x_1 & + & 12x_2 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

Bestimme u_1, u_2, und u_3 durch das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llrcrcrcr}
\text{(D)} & \min & 5u_1 & + & 7u_2 & + & u_3 & & \\
 & \text{s.t.} & 4u_1 & + & 8u_2 & + & 2u_3 & = & 12 \\
 & & 2u_1 & + & 12u_2 & - & 3u_3 & = & 10 \\
 & & u_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & u_2 & & & \geq & 0 \\
 & & & & & & u_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ Jede zulässige Lösung von (D) gibt eine obere Schranke für (P).

Für das lineare Programm (P)

$$\begin{aligned} \max c^t x & & \\ \text{s.t.} \quad Ax & \leq & b \end{aligned}$$

in Standard-Ungleichungsform ist das **duale lineare Programm (D)** definiert als

$$\begin{aligned} \min b^t y & & \\ \text{s.t.} \quad A^t y & = & c \\ y & \geq & 0 \end{aligned}$$

In diesem Zusammenhang heißt (P) dann auch **primales lineares Programm**.

<u>Satz</u>: Wenn die beiden Systeme

$Ax \le b$ und $A^t y = c,\ y \ge 0$ jeweils

eine zulässige Lösung haben, dann

gilt $\max\{c^t x : Ax \le b\} \le \min\{b^t y : A^t y = c, y \ge 0\}$

Diese Aussage heißt <u>schwache Dualität</u>

<u>Beweis:</u> Sei: $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax \leq b$, $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^t y = c$, $y \geq 0$.

$$\Rightarrow c^t x = (A^t y)^t x = y^t A x \leq y^t b \quad \square$$

Fourier-Motzkin-Elimination I

Ziel: Entscheide zu einem gegebenen System von Ungleichungen, ob es zulässig ist.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}
$$

Erster Schritt: Entferne die Variable x.

Fourier-Motzkin-Elimination II

$$\begin{array}{rcrcrcr}
3x & + & 2y & + & 4z & \leq & 10 \\
3x & & & + & 2z & \leq & 9 \\
2x & - & y & & & \leq & 5 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 3 \\
-2x & & & & & \leq & 4 \\
& & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{array}{ccrcrcr}
x & \leq & \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z \\
x & \leq & 3 & & & - & \frac{2}{3}z \\
x & \leq & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & \\
x & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\
x & \geq & -2 & & & & \\
& & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination III

$$\begin{array}{rclcrcr}
x & \leq & \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z \\
x & \leq & 3 & & & - & \frac{2}{3}z \\
x & \leq & \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & \\
x & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\
x & \geq & -2 & & & & \\
 & & 2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Dieses System ist genau dann zulässig, wenn das folgende System eine Lösung hat:

$$\begin{array}{rcl}
\min\left\{\frac{10}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z, \quad 3 - \frac{2}{3}z, \quad \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y\right\} & \geq & \max\left\{-3 + 2y - z, \quad -2\right\} \\
2y + 2z & \leq & 7
\end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination IV

$$\begin{array}{rcl} \min\left\{\frac{10}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z,\quad 3 - \frac{2}{3}z,\quad \frac{5}{2} + \frac{1}{2}y\right\} & \geq & \max\left\{-3 + 2y - z,\quad -2\right\} \\ 2y + 2z & \leq & 7 \end{array}$$

Dieses System kann folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\ \frac{10}{3} & - & \frac{2}{3}y & - & \frac{4}{3}z & \geq & -2 & & & & \\ 3 & & & - & \frac{2}{3}z & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\ 3 & & & - & \frac{2}{3}z & \geq & -2 & & & & \\ \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & & \geq & -3 & + & 2y & - & z \\ \frac{5}{2} & + & \frac{1}{2}y & & & \geq & -2 & & & & \\ & & 2y & + & 2z & \leq & 7 & & & & \end{array}$$

Fourier-Motzkin-Elimination V

Umwandlung in Standardform:

$$
\begin{array}{rcrcr}
\frac{8}{3}y & + & \frac{1}{3}z & \leq & \frac{19}{3} \\
\frac{2}{3}y & + & \frac{4}{3}z & \leq & \frac{16}{3} \\
\frac{8}{3}y & - & z & \leq & 6 \\
 & & \frac{2}{3}z & \leq & 5 \\
\frac{3}{2}y & - & z & \leq & \frac{11}{2} \\
-\frac{1}{2}y & & & \leq & \frac{9}{2} \\
2y & + & 2z & \leq & 7
\end{array}
$$

Iteriere diese Schritte und entferne *alle* Variablen.