TDI-Systeme

Notation: Für ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ und eine Fläche F von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, heißt eine Zeile von A **aktiv**, wenn die zugehörige Ungleichung in $Ax \leq b$ von allen Vektoren $x \in F$ mit Gleichheit erfüllt ist.

Theorem:

Ein zulässiges Ungleichungssystem $Ax \leq b$ ist genau dann TDI, wenn für jede minimale Fläche F von $P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ die Zeilen von A, die in F aktiv sind, eine Hilbert-Basis bilden.

TDI-Systeme

Theorem

Eine rationales Ungleichungssystem $Ax \leq 0$ ist genau dann TDI, wenn die Zeilen von A eine Hilbert-Basis bilden.

TDI-Systeme

Theorem (Giles und Pullyblank

Für jedes rationale Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es ein rationales TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Der Vektor b kann genau dann ganzzahlig gewählt werden, wenn P ganzzahlig ist.

TDI-Systeme

Theorem (Giles und Pullyblank

Für jedes rationale Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt es ein rationales TDI-System $Ax \leq b$ mit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Der Vektor b kann genau dann ganzzahlig gewählt werden, wenn P ganzzahlig ist.

Beweis: Wissen schon: Wenn b in dieser Darstellung ganzzahlig ist, dann ist P ganzzahlig.
O.B.d.A sei $P \neq \emptyset$.
Für jede minimale Fläche F von P sei

$$C_F := \{c \in \mathbb{R}^n \mid c^t z = \max\{c^t x \mid x \in P\} \text{ für alle } z \in F\}.$$

$\Rightarrow C_F$ ist ein polyedrischer Kegel.
Denn: Es sei $P = \{\tilde{A}x \leq \tilde{b}\}$. Dann wird C_F von den in F aktiven Zeilen von $\tilde{A}$ erzeugt.

Beweis (Fortsetzung):
Sei F eine minimale Fläche, und es sei $a_1, \dots, a_t$ eine ganzzahlige Hilbert-Basis, die C_F erzeugt.

Wähle $x_0 \in F$, und definiere $\beta_i := a_i^t x_0$ für $i = 1, \dots, t$.
$\Rightarrow \beta_i = \max\{a_i^t x \mid x \in P\}$ $(i = 1, \dots, t)$.

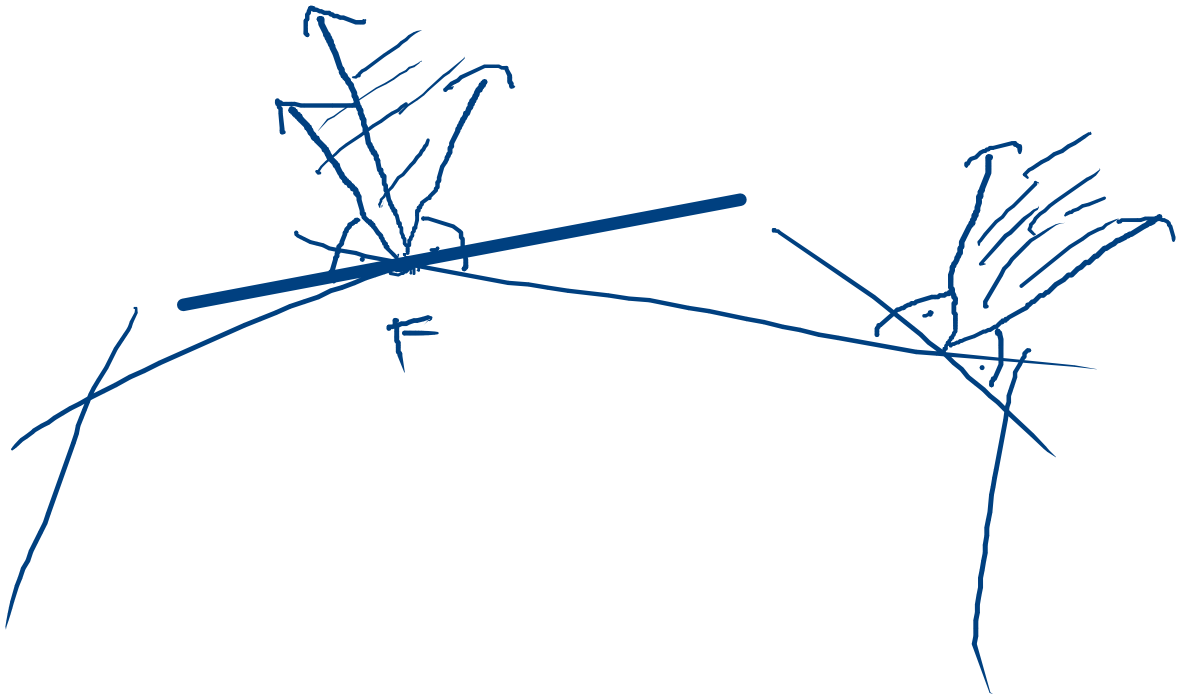
Sei $\mathcal{S}_F$ das Ungleichungssystem $a_1^t x \leq \beta_1, \dots, a_t^t x \leq \beta_t$. Alle Ungleichungen in $\mathcal{S}_F$ sind für P gültig.

Beweis (Fortsetzung):
Sei $Ax \leq b$ die Vereinigung der System $\mathcal{S}_F$ über alle minimalen Flächen F of P.
$\Rightarrow P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.

Und: Falls $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus P$, dann gibt es eine Stützhyperebene von P, die x^* von P separiert, und diese Stützhyperebeben berührt P in einer minimalen Fläche.
$\Rightarrow$ Es gibt eine Ungleichung in, $Ax \leq b$, die von x^* verletzt wird.

$\Rightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.
Und: $Ax \leq b$ ist TDI.

Falls P ganzzahlig ist, können alle β_i ganzzahlig gewählt werden, weil alle $x_0 \in F$ ganzzahlig gewählt werden können. $\square$



Vollständige Unimodularität

Definition:

Eine $m \times n$-Matrix A mit Rang m heißt **unimodular**, wenn $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $\det(B) \in \{-1, 1\}$ für alle regulären $m \times m$-Teilmatrizen B von A.

Beobachtung: Eine quadratische unimodulare Matrix hat eine ganzzahlige Inverse Matrix (Cramersche Regel)

Vollständige Unimodularität

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right]$$

Definition:

Eine Matrix A heißt **vollständig unimodular** (**totally unimodular (TU)**), wenn jede Unterdeterminante von A (also jede Determinante von quadratischen Untermatrizen von A) 0, -1 oder 1 ist.

<u>Beobachtung:</u> A ist genau dann TU, wenn

$[I_m \; A]$ unimodular ist.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei A vollständig unimodular, und sei b ein ganzzahliger Vektor. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei A vollständig unimodular, und sei b ein ganzzahliger Vektor. Dann ist das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ganzzahlig.

Beweis: Es reicht zu zeigen: Jede minimale Fläche F von P enthält einen ganzzahligen Vektor.

Jede minimale Fläche von P kann als $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x = b'\}$ geschrieben werden, wobei $A'x \leq b'$ ein Teilsystem von $Ax \leq b$ ist.

O.B.d.A: A' hat vollen Zeilenrang.
Nach Vertauschen von Spalten können wir $A' = \begin{bmatrix} U \; V \end{bmatrix}$ für eine Matrix U mit $\det(U) \in \{-1, 1\}$ annehmen.

$A' \cdot x = [U \; V] \begin{pmatrix} U^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} = b'$

$\Rightarrow x := \begin{pmatrix} U^{-1}b' \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein ganzzahliger Vektor in F. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann gilt: A ist genau dann unimodular, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Vollständige Unimodularität

Theorem

Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ eine Matrix mit Rang m. Dann gilt: A ist genau dann unimodular, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

$[\quad A' \quad]$

Beweis:

"$\Rightarrow$:" Sei A unimodular und b ein ganzzahliger Vektor.

Sei x' eine Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.

$\Rightarrow$ Es gibt n linear unabh. Ungleichungen in $Ax \leq b, -Ax \leq -b, -I_n x \leq 0$, die von x' mit Gleichheit erfüllt werden.

$\Rightarrow$ Die Spalten von A, die zu Nicht-Null-Einträgen von x' gehören, sind linearly unabhängig.

Diese Spaltenmenge kann zu einer regulären $m \times m$-Untermatrix B von A erweitert werden.

$A = [B \,\vdots\, N]$

$\Rightarrow$ Die Einschränkung von x' auf Koordinaten, die zu B gehören, ist $B^{-1}b$.
Wegen $\det(B) \in \{-1, 1\}$) ist B^{-1} ganzzahlig.
Die anderen Einträge von x' sind Null. $\Rightarrow$ x' ist ganzzahlig.

Vollständige Unimodularität

Beweis (Fortsetzung):
"$\Leftarrow$:" Annahme: $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ ist für jeden ganzzaligen Vektor b ganzzahlig.
Sei B eine reguläre $m \times m$-Untermatrix von A.

Zu zeigen: $\det(B) \in \{-1, 1\}$.

Cramersche Regel: Es reicht zu zeigen, dass $B^{-1}u$ für jeden ganzzahligen Vektor u ganzzahlig ist.

$Bz = By +$

Sei u ein ganzzahliger Vektor.
Sei y ein ganzzahliger Vektor mit $z := y + B^{-1}u \geq 0$.
$\Rightarrow$ $b := Bz$ ist ganzzahlig.
Ergänze z mit Nullen zu einem Vektor z' mit $Az' = Bz = b$.
$\Rightarrow$ z' ist eine zulässige Basislösung von $Ax = b$.
$\Rightarrow$ z' ist eine Ecke von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.
$\Rightarrow$ z' ist ganzzahlig.
$\Rightarrow$ z ist ganzzahlig.
Daher ist $B^{-1}u = z - y$ ganzzahlig. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem (Hoffman und Kruskal)

Ein ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Vollständige Unimodularität

Theorem (Hoffman und Kruskal)

Ein ganzzahlige Matrix A ist genau dann TU, wenn für jeden ganzzahligen Vektor b das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ganzzahlig ist.

Beweis: A ist genau dann TU, wenn $\left[I_m\, A\right]$ unimodular ist.
Sei b ein ganzzahliger Vektor.
$\Rightarrow$ Die Ecken von $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ sind genau dann ganzzahlig, wenn die Ecken von $\{z \in \mathbb{R}^{m+n} \mid \left[I_m\, A\right] z = b, z \geq 0\}$ ganzzahlig sind.
Die Aussage folgt aus dem vorigen Theorem. $\square$

Vollständige Unimodularität

Theorem

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann vollständig unimodular, wenn für alle ganzzahligen Vektoren b und c die Optima für beide Seiten der Dualitäts-Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$$

von ganzahligen Vektoren angenommen wird (wenn beide Optima existieren).

Vollständige Unimodularität

Theorem

Eine ganzzahlige Matrix A ist genau dann vollständig unimodular, wenn für alle ganzzahligen Vektoren b und c die Optima für beide Seiten der Dualitäts-Gleichung

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^t y \mid A^t y \geq c, y \geq 0\}$$

von ganzahligen Vektoren angenommen wird (wenn beide Optima existieren).

Beweis: Folgt direkt aus Hoffmans and Kruskals Theorem.
Denn A ist genau dann TU, wenn A^t TU ist. $\square$