

## Kombinatorik, Graphen, Matroide

## 11. Übung

1. Für einen ungerichteten Graph  $G$  und  $t \in \mathbb{N}$  sei  $p_G(t)$  die Zahl der verschiedenen zulässigen Knotenfärbungen von  $G$  mit den Farben  $\{1, \dots, t\}$ . Dabei betrachten wir zwei Knotenfärbungen als verschieden, wenn es mindestens einen Knoten gibt, dem sie unterschiedliche Farben zuordnen. Zeigen Sie, daß für jeden Graphen  $G$  die Abbildung  $p_G : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ein Polynom vom Grad  $|V(G)|$  ist. (4 Punkte)

Hinweis: Betrachten Sie zunächst vollständige Graphen. Bei Graphen, in dem es zwei Knoten  $v$  und  $w$  gibt, die nicht durch eine Kante verbunden sind, können Sie sich dann überlegen, was passiert, wenn Sie  $v$  und  $w$  durch eine zusätzliche Kante verbinden oder  $\{v, w\}$  kontrahieren.

2. (a) Bestimmen Sie  $p_G$  (siehe Aufgabe 1) für den Fall, daß  $G$  ein Baum ist.  
(b) Wie sieht  $p_G$  aus, wenn  $G$  ein Wald ist, der aus  $k$  Zusammenhangskomponenten besteht? (4 Punkte)
3. Geben Sie ein Matroid an, das kein graphisches Matroid ist. (4 Punkte)
4. Sei  $G$  ein ungerichteter Graph und  $k \in \mathbb{N}$ .  $\mathcal{F}$  bestehe aus den Teilmengen von  $E(G)$ , die die Vereinigung der Kantenmengen von  $k$  Wäldern sind. Zeigen Sie, daß  $(E(G), \mathcal{F})$  ein Matroid ist. (4 Punkte)