Mathematische Optimierung II — Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sommersemester 2005 — Ulrich Brenner

Übungsblatt 11

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das folgende primale Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \min & x_1^2 + x_2^2 & & \\ \text{s.t.} & -x_1 - x_2 + 4 & \leq & 0 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie die optimale Lösung des primalen Problems.

(ii) Bestimmen und lösen Sie das zugehörige Lagrange-duale Problem.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:
Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\min\{x_2 \,:\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 \geq 1, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(i) Bestimmen Sie die optimale Lösung des primalen Problems.

(ii) Ist die optimale Lösung ein KKT-Punkt?

(iii) Existiert ein Sattelpunkt?

(iv) Bestimmen und lösen Sie das zugehörige Lagrange-duale Problem.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Beweisen Sie Satz 3.10 aus der Vorlesung.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweisen Sie Satz 3.11 aus der Vorlesung.

(5 Punkte)

(b.w.)

Aufgabe 5:
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit $V = \{1, \ldots, n + k\}$ (mit $n, k \in \mathbb{N}$). Sei $x_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{n+1, \ldots, n+k\}$. Gesucht sind nun Zahlen $x_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $\sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$ minimiert wird.

(i) Geben Sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ an, so daß der Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ genau dann $Ax = b$ erfüllt, wenn $\sum_{\{i,j\} \in E} (x_i - x_j)^2$ minimal ist.

(ii) Zeigen Sie: A ist genau dann positiv definit, wenn $k > 0$ gilt.

(iii) Sei nun $k = 2$ und sei $x_{n+1} = 0$ und $x_{n+2} = 1$. In jedem Knoten $i \in V$ wird dann ein Random Walk gestartet, wobei in jedem Schritt zufällig und mit Gleichverteilung einer der Nachbarn des betrachteten Knoten ausgewählt und besucht wird. Eine Random Walk endet, sobald einer der Knoten $n + 1$ oder $n + 2$ erreicht wird. Für $i \in V$ sei p_i die Wahrscheinlichkeit, daß der in i beginnende Random Walk in $n + 2$ endet. Zeigen Sie, daß der Vektor $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ebenfalls $Ap = b$ erfüllt.

(4 Punkte)

Abgabe: Freitag, 1. Juli 2005, vor der Vorlesung.