Mathematische Optimierung II
Sommersemester 2005

Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Ulrich Brenner

Übungsblatt 9

Aufgabe 1:
Es sei $h(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Zeigen Sie, daß in $0 \in M[h]$ die LUB nicht erfüllt ist und daß die Aussage (i) von Satz 2.7 in $0 \in M[h]$ nicht gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 2:
Beweisen Sie den Satz 2.9 aus der Vorlesung.
Hinweis: Betrachten Sie eine im Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Welche Konsequenzen für die partiellen Ableitungen von f in 0 ergeben sich, wenn $0 \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q$ mit $n = p + q$ ein lokales Minimum von $f_{|\mathbb{R}^p \times \mathbb{H}^q}$ ist? (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $P := \{x : Ax \geq b\}$. Betrachten Sie Optimierungsprobleme der Form $\min\{c^T x : x \in P\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(i) Bestimmen Sie Tangentialraum und -kegel für P.

(ii) Für $c^T x, P, \bar{x}$ seien die Voraussetzungen des Satzes 2.9 erfüllt. Interpretieren Sie Voraussetzung und Aussage des Satzes für $c^T x, P, \bar{x}$. Zeigen Sie darüber hinaus, daß die Lagrange-Multiplikatoren gerade den dualen Variablen entsprechen und daß man die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen mit Hilfe von Dualität und komplementärem Schlupf ausdrücken kann. (5 Punkte)

Aufgabe 4:

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie:
Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige $x_1, \ldots, x_n \in K$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Aufgabe (a) die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i,$$

($n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$, $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{i=1}^{n} \delta_i = 1$.)

Anmerkung: Die Ungleichung in (a) wird auch *Jensensche Ungleichung* genannt.

(5 Punkte)

Aufgabe 5:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Ist f konvex, so ist die Menge $\{x \in K \mid f(x) \leq \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ konvex. Gilt die Umkehrung?

(b) Zeigen Sie, daß f genau dann konvex ist, wenn $Epi(f)$ konvex ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 6:
Es sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $D^2 f(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Zeigen Sie, daß f streng konvex ist. Gilt auch die Umkehrung? (4 Punkte)

Aufgabe 7:
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Für alle $x, y \in K$ existiere ein $\lambda \in (0, 1)$ mit $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. Zeigen Sie, daß f konvex ist. (6 Punkte)

Aufgabe 8:
Zeigen Sie, daß das Wolfe-duale eines LP das übliche duale LP ist. (4 Punkte)

Abgabe: Freitag, 17. Juni 2005, vor der Vorlesung.

Zur Erinnerung: Die Übung am Dienstag, 14.Juni, fällt aus.