Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sven Peyer

Übungsblatt 4

Aufgabe 1:
Es sei A eine Matrix mit Einträgen $0, -1$ und 1. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist total unimodular.

(ii) Für jeden ganzzahligen Vektor hat der Polyeder $\{x \mid x \geq 0, Ax \leq b\}$ nur ganzzahlige Ecken.

(iii) Für alle ganzzahligen Vektoren a, b, c, d hat der Polyeder $\{x \mid c \leq x \leq d, a \leq Ax \leq b\}$ nur ganzzahlige Ecken.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht total unimodular ist, aber dass $\{x \mid Ax = b\}$ für alle $b \in \mathbb{Z}^3$ ganzzahlig ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 3:
Es sei M eine $\{0, 1\}$-Matrix, in der in jeder Spalte die 1-Einträge aufeinanderfolgen. Zeigen Sie, dass M total unimodular ist.

(3 Punkte)

Zusatzaufgabe:
Es sei A eine Matrix mit Einträgen $0, -1$ und 1. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

b.w.

(i) A ist total unimodular.

(v) Jede reguläre Teilmatrix von A besitzt eine Zeile mit einer ungeraden Anzahl von 0 verschiedener Einträge.

(vi) Die Summe der Einträge in jeder quadratischen Teilmatrix von A mit geraden Spalten- und Zeilensummen ist durch 4 teilbar.

(vii) Keine quadratische Teilmatrix von A hat die Determinante -2 oder $+2$.

Hinweis: In der Vorlesung wird in Satz 1.5.4 die Äquivalenz von (i) und (iv) gezeigt, wobei

(iv) Jede Menge von Zeilen R von A kann so in zwei Mengen $R = R_1 \cup R_2$ partitioniert werden, dass die Summe der Zeilen in R_1 minus die Summe der Zeilen in R_2 einen Vektor ergibt, dessen Einträge alle $0, -1, 1$ sind, d.h.

$$\sum_{i \in R_1} a_{i,j} - \sum_{i \in R_2} a_{i,j} \in \{0, -1, 1\}$$

für alle j.

Benutzen Sie zur Beweisführung der Äquivalenz von (i), (v), (vi) und (vii) die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iv) sowie die folgenden Implikationen:
(iv) $\Rightarrow$ (v), (iv) $\Rightarrow$ (vi), (v) $\Rightarrow$ (vii), (vi) $\Rightarrow$ (vii), (vii) $\Rightarrow$ (i).

(10 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 18. Mai 2004, vor der Vorlesung.