Mathematische Optimierung II | Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Sommersemester 2004 | Sven Peyer

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Belegen Sie die Aussage aus der Vorlesung, dass i.A. in

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \leq \min\{b^T y \mid A^T y = c, y \geq 0, y \in \mathbb{Z}^m\}$$

keine Gleichheit gilt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:
Geben Sie ein Beispiel für folgende Bemerkung an:
Sind A, b oder c nicht rational, so existiert das Maximum in

$$\sup\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

nicht immer, d.h. es gibt i.A. kein $x_0 \in \mathbb{Z}^n$ mit $c^T x_0 = \sup\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $K_n = (V, E)$ der vollständige Graph, d.h. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $E = \binom{V}{2}$. Sei $c : E \to \mathbb{R}$. Gesucht wird eine Permutation $\pi \in S_n$, so dass $\sum_{i=1}^{n} c(\pi(i)\pi(i+1)) + c(\pi(n)\pi(1))$ minimal ist. Dieses Problem ist das bekannte *Traveling Salesman Problem*.
Zeigen Sie, dass jede zulässige Lösung des nachfolgend aufgestellten ILPs eineindeutig einem Hamiltonkreis entspricht. (Interpretieren Sie insbesondere die Variablen $x_{i,k}$ und y_e und diskutieren Sie die gegebenen Ungleichungen.)

b.w.

$$
\begin{array}{lll}
\min \sum_{e\in E} c(e) y_e & & \\
x_{1,1} & = 1 & \\
\sum_{k=1}^{n} x_{i,k} & = 1 & , i = 1,2,\dots,n \\
\sum_{i=1}^{n} x_{i,k} & = 1 & , k = 1,2,\dots,n \\
\sum_{e\in E} y_e & = n & \\
x_{i,k-1} + x_{j,k} - y_e & \leq 1 & , e = (i,j) \in E, 2 \leq k \leq n \\
x_{i,n} + x_{1,1} - y_e & \leq 1 & , e = (i,1) \in E \\
0 \leq x_{i,k}, y_e & \leq 1 & \\
x_{i,k}, y_e & \in \mathbb{Z} &
\end{array}
$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^{V\cup E}$ affine Hülle der Inzidenzvektoren der Cliquen der Größen $0, 1, 2$ ist.

(6 Punkte)

Abgabe: Dienstag, 27. April 2004, vor der Vorlesung.