Aufgabe 1 [10 Punkte] Sei G ein ungerichteter Graph, $k \in \mathbb{N}$ und $x, y, z \in V(G)$. Zeigen Sie: Gibt es k paarweise kantendisjunkte x-y-Wege und k paarweise kantendisjunkte y-z-Wege, dann gibt es auch k paarweise kantendisjunkte x-z-Wege.

Aufgabe 2 [5+5+5+5 Punkte] Sei G ein stark zusammenhängender gerichteter Graph mit mehr als einem Knoten. Welche der folgenden Aussagen gelten dann immer? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

(a) G ist nicht azyklisch.

(b) Für alle $x, y \in V(G)$ enthält G einen x-y-Weg P und einen y-x-Weg Q, so dass P und Q kantendisjunkt sind.

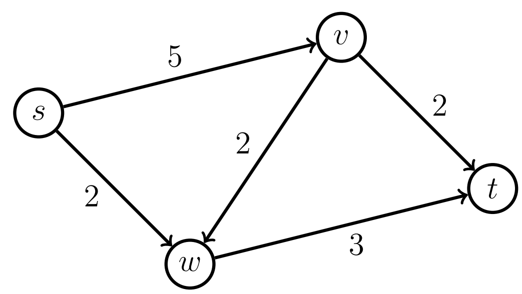
(c) Für jedes Branching B in G gibt es eine Arboreszenz in G, die B enthält.

(d) Es gibt eine positive ganzzahlige Zirkulation in G, das heißt ein $f : E(G) \to \mathbb{Z}_{>0}$ mit $f(\delta^-(v)) = f(\delta^+(v))$ für alle $v \in V(G)$.

Aufgabe 3 [5+5 Punkte] Wir betrachten den Push-Relabel-Algorithmus von Goldberg und Tarjan. Wir wollen damit hier nur den maximalen Wert $v_{\max}$ eines s-t-Flusses in einem gegebenen Netzwerk (G, u, s, t) berechnen.

(a) Zeigen Sie, dass man den Algorithmus dann vorzeitig stoppen kann, sobald die Distanzmarkierung jedes aktiven Knoten mindestens $n-1$ ist, wobei $n = |V(G)|$. Woran kann man dann $v_{\max}$ ablesen?

(b) Führen Sie diesen Algorithmus in dem abgebildeten Netzwerk durch. Die Zahlen neben den Kanten stellen die Kapazitäten dar. Sie können wie in (a) stoppen, wenn der maximale Wert bekannt ist.



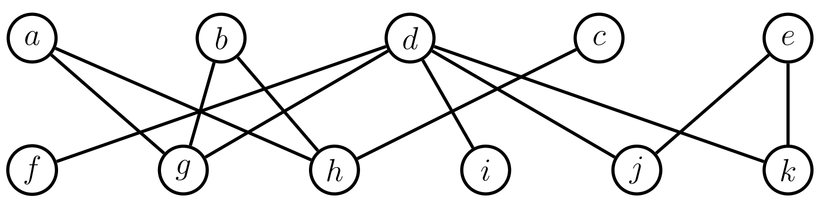
Aufgabe 4 [10 Punkte] Gegeben sei ein (ungewichteter) gerichteter Graph G, $s, t \in V(G)$ und $k \in \mathbb{N}$. Wie kann man in polynomieller Zeit entscheiden, ob es k paarweise kantendisjunkte kürzeste s-t-Wege gibt, und gegebenenfalls solche finden?

Aufgabe 5 [5+5 Punkte] Sei $n \in \mathbb{N}$ und $c : \{1, \ldots, n\}^2 \to \mathbb{Z}$. Eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ heiße optimal, wenn sie $\sum_{i=1}^{n} c(i, \pi(i))$ minimiert. Geben Sie möglichst effiziente Algorithmen und deren Laufzeit für folgende Probleme an.

(a) Zu gegebenen n und c wie oben finde man eine optimale Permutation.

(b) Zu gegebenen n und c wie oben und einer optimalen Permutation π finde man eine zweite (von π verschiedene) optimale Permutation oder entscheide, dass keine solche existiert.

Aufgabe 6 [5+5 Punkte] Geben Sie im unten abgebildeten Graphen eine Knotenüberdeckung minimaler Kardinalität an. Zeigen Sie, dass es wirklich keine kleinere gibt, indem Sie den Satz von König verwenden.



Aufgabe 7 [5+5+5+5 Punkte] Zeigen Sie für jedes der folgenden Entscheidungsprobleme entweder, dass es in polynomieller Zeit lösbar ist, oder, dass es *NP*-vollständig ist. Eine Instanz besteht jeweils aus einem ungerichteten Graphen G mit mehr als einem Knoten und einer natürlichen Zahl k. Die Frage lautet:

(a) Ist G k-fach kantenzusammenhängend?

(b) Hat G einen 2-fach kantenzusammenhängenden aufspannenden Subgraphen mit k Kanten?

(c) Hat G eine stark zusammenhängende Orientierung?

(d) Gibt es k paarweise verschiedene Cliquen in G mit jeweils k Knoten?

Aufgabe 1 [10 Punkte] Nach dem Satz von Menger existieren genau dann k paarweise kantendisjunkte x-z-Wege, wenn es kein $F \subseteq E(G)$ mit $|F| < k$ gibt, so dass z von x aus in $G_F := (V(G), E(G) \setminus F)$ nicht erreichbar ist. Falls es ein solches F gibt, kann in G_F nicht zugleich y von x aus und z von y aus erreichbar sein (schließlich ist Erreichbarkeit transitiv). Somit gibt es dann – nach der einfachen Richtung des Satzes von Menger – keine k paarweise kantendisjunkten x-y-Wege oder keine k paarweise kantendisjunkten y-z-Wege.

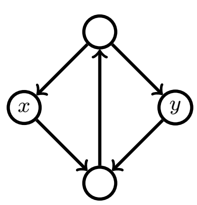
Aufgabe 2 [5+5+5+5 Punkte] Sei G ein stark zusammenhängender gerichteter Graph mit mehr als einem Knoten. Welche der folgenden Aussagen gelten dann immer? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

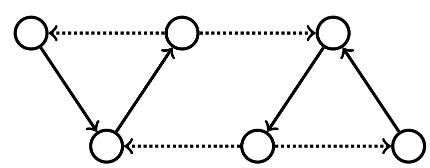
(a) Wahr.

1. Beweis: G ist zusammenhängend (es gibt also mindestens eine Kante) und jede Kante gehört zu einem Kreis.

2. Beweis: Seien x und y zwei verschiedene Knoten. Es gibt einen Weg P von x nach y und einen Weg Q von y nach x. $(V(G), E(P) \dot\cup E(Q))$ ist eulersch und enthält somit einen Kreis.

(b+c) Falsch. Abgebildet sind Gegenbeispiele. Rechts bilden die fetten Kanten ein inklusionsmaximales, aber nicht zusammenhängendes Branching.





(d) Wahr.

1. Beweis: setze $b(v) := |\delta^-(v)| - |\delta^+(v)|$ und alle Kapazitäten unendlich; dann ist $u(\delta^+(X)) = \infty \geq b(X)$ für alle $\emptyset \neq X \subset V(G)$, da G stark zusammenhängend. Nach dem Satz von Gale existiert dann ein b-Fluss, und da u und b ganzzahlig sind, existiert auch ein ganzzahliger. Addiere 1 zu jedem Flusswert, um eine positive Zirkulation zu erhalten.

2. Beweis: jede Kante e ist in einem Kreis C_e enthalten, setze $f(e) := |\{e' \in E(G) : e \in E(C_{e'})\}|$ für alle $e \in E(G)$.

Aufgabe 3 [5+5 Punkte]

(a) Sei dann X die Menge der Knoten von denen aus t im Residualgraph erreichbar ist. Weder s noch ein aktiver Knoten gehört zu X, denn es ist $d(v) \leq d(w) + 1$ für jede Kante (v, w) des Residualgraphs und $d(t) = 0$, somit $d(x) \leq |V(G)| - 2$ für alle $x \in X$. Daher ist $\mathrm{ex}(t) = \sum_{v \in X} \mathrm{ex}(v) = f(\delta^-(X)) - f(\delta^+(X)) = u(\delta^-(X)) - 0$ (nach Definition von X), und somit gibt es keinen s-t-Fluss mit höheren Wert als $\mathrm{ex}(t)$. Der Algorithmus würde im weiteren Verlauf aber einen Fluss vom Wert $\mathrm{ex}(t)$ berechnen.

(b) Zu Beginn werden die Kanten (s, v) und (s, w) saturiert; dann sind v und w aktiv, mit $d(s) = 4$, $d(v) = d(w) = d(t) = 0$. Dann gibt es viele mögliche Verläufe. Z.B. kann ein RELABEL(v) stattfinden, das $d(v)$ auf 1 erhöht, gefolgt von saturierenden PUSH-Operationen auf (v, w) und (v, t). Da v aktiv bleibt, kann erneut RELABEL(v) erfolgen, bis $d(v) = 5$ ist, und dann eine Einheit von v nach s zurückgeschoben werden. Spätestens jetzt muss w betrachtet werden: nach einem RELABEL(w) ist $d(w) = 1$ und die Kante (w, t) wird einem PUSH unterzogen. Schließlich muss $d(w)$ soweit erhöht werden, dass die überzählige Einheit nach s zurückgeschoben werden kann.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

1. Beweis: Mit BFS von s aus können alle Abstände $\mathrm{dist}(s, v)$ für alle v und somit der Level-Graph berechnet werden, der genau die Kanten (v, w) mit $\mathrm{dist}(v) + 1 = \mathrm{dist}(w)$ enthält. In diesem setzen wir alle Kapazitäten auf 1 und suchen einen ganzzahligen s-t-Fluss vom Wert k (oder entscheiden, dass keiner existiert), zum Beispiel mit dem Ford-Fulkerson-Algorithmus in $O(km)$ Zeit (o.B.d.A. ist $k \leq m := |E(G)|$). Schließlich wenden wir den Flusszerlegungssatz an, um k kantendisjunkte s-t-Wege zu erhalten.

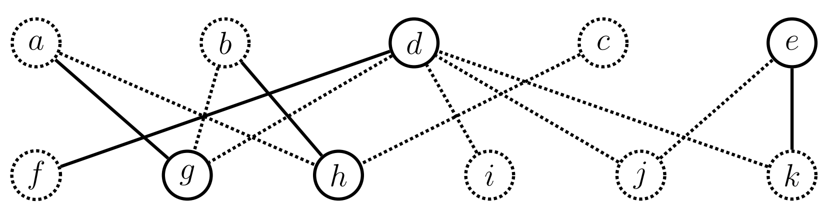
2. Beweis: Wir berechnen zunächst $\mathrm{dist}(s, t)$ mit BFS. Wir setzen für jede Kante ihre Kapazität und ihre Kosten auf 1. Mit einem polynomiellen Minimum-Cost-Flow-Algorithmus suchen wir dann einen ganzzahligen s-t-Fluss vom Wert k mit minimalen Kosten. Wenn ein solcher existiert und er Kosten $k \cdot \mathrm{dist}(s, t)$ hat, wenden wir wie oben Flusszerlegung an, sonst ist die Antwort nein.

Aufgabe 5 [5+5 Punkte]

(a) Zu lösen ist das ZUORDNUNGSPROBLEM. In dem vollständigen bipartiten Graphen $(X \dot{\cup} Y, X \times Y)$ mit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, unendlichen Kapazitäten, Kosten $c(x_i, y_j) := c(i, j)$ und Balancewerten $b(x_i) := -1$ und $b(y_j) := 1$ für $i, j = 1, \ldots, n$ berechnen wir mit dem SUKZESSIVE-KÜRZESTE-WEGE-ALGORITHMUS einen kostenminimalen ganzzahligen Fluss f in $O(nm + n^2 \log n) = O(n^3)$ Zeit. Setze $\pi(i) = j$ falls $f(x_i, y_j) = 1$.

(b) Betrachte das zugehörige f wie oben und prüfe (etwa durch Lösen des MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEMS, oder indem man ein zulässiges Potenzial berechnet und dann schaut, ob der Subgraph, der aus den Kanten mit reduzierten Kosten null besteht, azyklisch ist) in $O(mn) = O(n^3)$ Zeit, ob der Residualgraph einen Kreis mit Gewicht null besitzt. Falls ja, kann man entlang dessen um 1 augmentieren und eine andere gleich teure Permutation erhalten. Falls nein, existiert keine.

Aufgabe 6 [5+5 Punkte] Gezeigt ist fett eine Knotenüberdeckung mit vier Knoten und ein Matching mit vier Kanten. Nach der einfachen Richtung des Satzes von König ist eine Knotenüberdeckung nie kleiner als ein Matching.



Aufgabe 7 [5+5+5+5 Punkte]

(a) polynomiell lösbar: Nach dem Satz von Whitney ist für alle $s, t \in V(G)$ zu prüfen, ob es k paarweise kantendisjunkte s-t-Wege gibt. Dies ist äquivalent dazu, dass es einen s-t-Fluss vom Wert k in dem Graphen gibt, der aus G entsteht, indem jede Kante $\{x, y\}$ durch zwei Kanten (x, y) und (y, x), beide mit Kapazität 1, ersetzt wird (alternativ durch den Graphen aus Lösung 2(b)). Zu lösen sind also weniger als n^2 (wenn man s festhält und Aufgabe 1 ausnutzt, reichen sogar $n - 1$) Instanzen des MAXIMUM-FLOW-PROBLEMS.

(b) *NP*-vollständig: offenbar in *NP*, denn ein solcher Subgraph dient als Zertifikat; eine polynomielle Transformation von HAMILTONIAN CIRCUIT besteht einfach darin, $k := |V(G)|$ zu setzten, denn die 2-fach kantenzusammenhängenden aufspannenden Subgraphen mit $|V(G)|$ Kanten sind genau die Hamiltonkreise.

(c) polynomiell lösbar: das ist nach einer Übungsaufgabe äquivalent dazu, dass G 2-fach kantenzusammenhängend ist; siehe also (a).

(d) *NP*-vollständig: Für eine Ja-Instanz muss $k \leq |V(G)|$ sein, also können als Zertifikat einfach k Cliquen aufgezählt werden. Das Problem ist also in *NP*. Eine polynomielle Transformation von CLIQUE besteht einfach darin, den gegebenen Graphen durch k disjunkte Kopien seiner selbst zu ersetzen.