Name:

Tragen Sie oben Ihren Namen ein. Lesen Sie die Aufgaben genau. Fassen Sie sich kurz. Sie dürfen auf alle Algorithmen und Sätze aus der Vorlesung und Übung verweisen.

Aufgabe 1 [5+5+5+5 Punkte] Seien G ein ungerichteter Graph, $s, t \in V(G)$ und P ein kürzester s-t-Weg in G. Weiter gelte $|\delta_G(X \cup \{s\})| \geq 2$ für alle $X \subseteq V(G) \setminus \{s, t\}$, d.h. jeder s-t-Schnitt hat mindestens zwei Kanten. Welche der folgenden Aussagen gelten dann zwingend? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

(a) G kann so orientiert werden, dass im resultierenden gerichteten Graphen sowohl s von t als auch t von s erreichbar ist.

(b) Es gibt einen s-t-Weg Q, so dass P und Q kantendisjunkt sind.

(c) Es gibt $|E(P)|$ paarweise disjunkte s-t-Schnitte, aber nicht mehr.

(d) Die durch $c(e) := -1$ für $e \in E(P)$ und $c(e) := 1$ für $e \in E(G) \setminus E(P)$ definierte Gewichtsfunktion ist konservativ.

Aufgabe 2 [5+5 Punkte]

(a) Beschreiben Sie eine Instanz des Problems, ein maximal gewichtetes Branching zu berechnen, in der alle Kanten unterschiedliche Gewichte haben, und für die der Greedy-Algorithmus (sukzessive die teuerste mögliche Kante hinzunehmen) kein optimales Branching findet.

(b) Beschreiben Sie, wie Edmonds' Branching-Algorithmus aus der Vorlesung Ihre Instanz aus Teil (a) löst.

Aufgabe 3 [5+5 Punkte]

(a) Beschreiben Sie den Push-Relabel-Algorithmus von Goldberg und Tarjan für das Max-Flow-Problem.

(b) Wie können Sie die Anzahl seiner Push-Operationen beschränken, wenn jede Kante Kapazität 1 hat?

Name:

Aufgabe 4 [5+5+5 Punkte] Für einen gegebenen ungerichteten Graphen G mit gerader Anzahl Knoten n fragen wir, ob es eine Nummerierung der Knoten $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ gibt, so dass

(a) $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ für alle $1 \leq i < j \leq \frac{n}{2}$.

(b) $|\{i, j\} \cap \{1, \ldots, \frac{n}{2}\}| = 1$ für alle $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, und $\{v_i, v_{i+\frac{n}{2}}\} \in E(G)$ für alle $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$.

(c) $\{v_i, v_{i+1}\} \in E(G)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

Zeigen Sie für jedes dieser drei Entscheidungsprobleme, dass es polynomiell lösbar ist oder dass es NP-vollständig ist.

Aufgabe 5 [15 Punkte] Seien G ein stark zusammenhängender gerichteter Graph, $c : E(G) \to \mathbb{R}$ und π ein zulässiges Potenzial in (G, c). Sei $F := \{e \in E(G) : c_\pi(e) = 0\}$ die Menge der Kanten mit reduzierten Kosten null. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

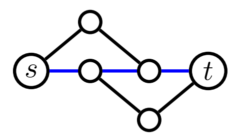
(a) $(V(G), F)$ ist stark zusammenhängend.

(b) Für jedes andere zulässige Potential ρ in (G, c) gibt es ein $\Delta \in \mathbb{R}$, so dass für alle $v \in V(G)$ gilt: $\rho(v) = \pi(v) + \Delta$.

(c) Für alle $v, w \in V(G)$ gehören alle Kanten jedes kürzesten v-w-Weges in (G, c) zu F.

Aufgabe 1

(a) wahr, denn nach dem Satz von Menger gibt es zwei kantendisjunkte s-t-Wege; orientiere einen von s nach t und den anderen von t nach s.



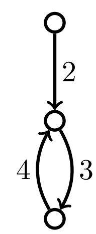
(b) falsch, siehe Gegenbeispiel rechts (P ist blau).

(c) wahr, denn $\delta(\{v \in V(G) : \mathrm{dist}_G(s, v) < k\})$ für $k = 1, 2, \ldots, |E(P)|$ sind paarweise disjunkte s-t-Schnitte, aber es kann nicht mehr geben, denn jeder s-t-Schnitt muss eine Kante von P enthalten.

(d) wahr, denn gäbe es einen negativen Kreis C, so hätte $H := (V(G), E(P) \triangle E(C))$ weniger Kanten als P, enthielte aber einen s-t-Weg (da s und t die einzigen Knoten mit ungeradem Grad in H sind), der also kürzer wäre als P.

Aufgabe 2

(a) Beispiel siehe Bild rechts. Der Greedy-Algorithmus wählt die Kante mit Gewicht 4, das optimale Branching hat aber Gewicht 5.



(b) Edmonds' Branching-Algorithmus wählt zunächst die Kanten mit den Gewichten 3 und 4, kontrahiert den Kreis, passt das Gewicht der verbleibenden Kante von 2 auf 1 an, wählt diese, und ergänzt schließlich vom Kreis die möglichen Kanten, hier die mit Gewicht 3.

Aufgabe 3

(a) siehe z.B. Korte–Vygen.

(b) Hat jede Kante Kapazität 1, dann gibt es keine nichtsaturierenden Pushs, und die Anzahl der saturienden Pushs ist wie immer $O(mn)$.

Aufgabe 4 Alle drei Probleme liegen offenbar in NP.

(a) NP-vollständig. Die Antwort ist genau dann ja, wenn es eine Clique mit $\frac{n}{2}$ Knoten gibt. Eine Instanz (G, k) des als NP-vollständig bekannten Problems CLIQUE transformieren wir in polynomieller Zeit auf eine äquivalente Instanz G' von (a), indem wir $2k - n$ isolierte Knoten zu G hinzufügen, falls $k > \frac{n}{2}$, und $n - 2k$ mit sämtlichen Knoten verbundene Knoten, falls $k < \frac{n}{2}$.

(b) polynomiell lösbar: zu entscheiden ist, ob G bipartit ist und ein perfektes Matching hat. Zunächst findet man (in linearer Zeit) eine Bipartition $V(G) = A \dot{\cup} B$ oder entscheidet dass G nicht bipartit ist. Falls G bipartit ist, kann man ein maximales Matching M in $O(nm)$ Zeit finden und testen, ob M perfekt ist. Ist auch dies der Fall, kann man den Knoten aus A die Nummern $1, \ldots, \frac{n}{2}$ geben und die Knoten aus B so nummerieren, dass $M = \left\{\{i, i + \frac{n}{2}\} : i = 1, \ldots, \frac{n}{2}\right\}$.

(c) NP-vollständig: zu entscheiden ist, ob G einen Hamiltonweg besitzt. Eine polynomielle Transformation von HAMILTONKREIS geht wie folgt: sei $v \in V(G)$ beliebig, füge Knoten s, t, u hinzu, verbinde s mit v und t mit u sowie u mit allen Nachbarn von v. (Wenn die Knotenanzahl dann nicht gerade ist, füge noch einen Knoten t' ein und verbinde t' mit t und u.) Dann gibt es einen Hamiltonweg (von s nach t) genau dann, wenn G einen Hamiltonkreis hat.

Aufgabe 5

(a)⇒(b): Seien $v, w \in V(G)$ und P ein v-w-Weg mit $E(P) \subseteq F$. Dann ist $c_\pi(E(P)) = 0$ und

$$0 \leq c_\rho(E(P)) = c_\pi(E(P)) + \rho(v) - \pi(v) - \rho(w) + \pi(w),$$

also $\rho(v) - \pi(v) \geq \rho(w) - \pi(w)$ für alle $v, w \in V(G)$ (und somit Gleichheit).

(b)⇒(c): Angenommen, es gäbe einen kürzesten v-w-Weg P in (G, c) und ein $e \in E(P) \setminus F$. Dann ist P auch ein kürzester v-w-Weg in (G, c_π). Also ist $w \in X := \{x \in V(G) : \mathrm{dist}_{(G,c_\pi)}(v, x) > 0\}$ sowie $v \notin X$. Setzt man $\epsilon := \min\{c_\pi(e) : e \in E(G) \setminus F\}$ sowie $\rho(x) := \pi(x) + \epsilon$ für $x \in X$ und $\rho(y) := \pi(y)$ für $y \in V(G) \setminus X$, so erhält man ein zulässiges Potenzial ρ, das sich von π nicht nur durch eine Konstante unterscheidet.

(c)⇒(a): trivial, da G stark zusammenhängend ist.