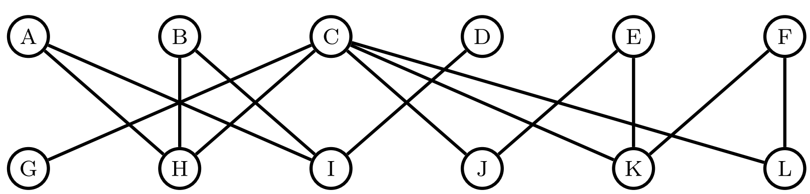
Name:

Aufgabe 1 [10 Punkte] Fünf Studenten (A, B, C, D und E) diskutieren über das Problem, in einem gegebenen ungerichteten Graphen G mit Knoten s und t möglichst viele paarweise kantendisjunkte s-t-Wege zu finden.

- A behauptet, dass folgender Algorithmus funktioniert: nimm einfach irgendeinen s-t-Weg P, lösche dessen Kanten, und iteriere.
- B entgegnet, dass dieser Algorithmus scheitern kann, aber nicht, wenn P immer ein kürzester s-t-Weg ist.
- C meint, dass auch mit dieser Einschränkung eventuell noch nicht einmal halb so viele s-t-Wege gefunden werden wie möglich.
- D ergänzt: Dies ist ja kein Wunder, schließlich ist das Problem ja *NP*-schwer.
- E antwortet: Wenn du wirklich zeigen kannst, dass das Problem *NP*-schwer ist, folgt $P = NP$.

Zwei der fünf haben recht. Wer? Warum?

Aufgabe 2 [5+5 Punkte] Geben Sie im unten abgebildeten Graphen eine stabile Menge maximaler Kardinalität an. Zeigen Sie auf elegante Weise, dass es wirklich keine größere gibt, indem Sie einen geeigneten Satz aus der Vorlesung benutzen.



Aufgabe 3 [5 Punkte] Seien (V, A) und (V, B) zwei Branchings mit derselben Knotenmenge und $2|A| < |B|$. Beweisen Sie, dass es dann eine Kante $e \in B \setminus A$ gibt, so dass $(V, A \cup \{e\})$ ein Branching ist.

Name:

Aufgabe 4 [10 Punkte] Seien G ein ungerichteter Graph und $c : V(G) \to \mathbb{N}$. Skizzieren Sie einen polynomiellen Algorithmus, der entscheidet, ob es eine Knotenmenge $X \subseteq V(G)$ mit $c(X) \geq \frac{1}{2}c(V(G))$ gibt, so dass $G[X]$ unzusammenhängend ist. Die genaue Laufzeit ist unerheblich.

Aufgabe 5 [3+3+3+3+3 Punkte] Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, wobei u und b ganzzahlig seien. Seien f und f' optimale b-Flüsse in (G, u). Welche der folgenden Aussagen gelten dann zwingend? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

(a) Falls $f \neq f'$, so enthält G einen Kreis mit K mit $c(E(K)) = 0$.

(b) Falls G einen Kreis mit K mit $c(E(K)) = 0$ enthält, so ist f nicht der einzige optimale b-Fluss in (G, u).

(c) Es gibt einen optimalen b-Fluss f'' in (G, u), so dass die Residualgraphen G_f und $G_{f'}$ Teilgraphen von $G_{f''}$ sind.

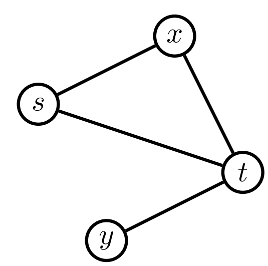
(d) Ist f ganzzahlig und $f' \neq f$, so gibt es einen ganzzahligen optimalen b-Fluss f'', der von f verschieden ist.

(e) Jedes zulässige Potenzial in (G_f, c) ist ein zulässiges Potenzial in $(G_{f'}, c)$.

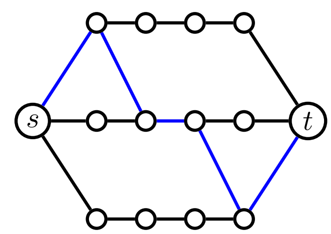
Aufgabe 6 [3+7 Punkte] Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{N}$, und $s, t \in V(G)$. Eine Kantenfolge F von s nach t in G, die jeden Knoten mindestens einmal enthält, heißt *s-t-Tour*. Ihre *Länge* ist die Summe ihrer Kantengewichte, wobei mehrfach benutzte Kanten entsprechend oft berücksichtigt werden. Gesucht ist eine s-t-Tour minimaler Länge. (Im Beispiel unten haben alle Kanten Gewicht 1; dann ist die minimale Länge einer s-t-Tour 4: man läuft von s über x, t und y zurück nach t.)

(a) Zeigen Sie, dass dieses Problem *NP*-schwer ist.

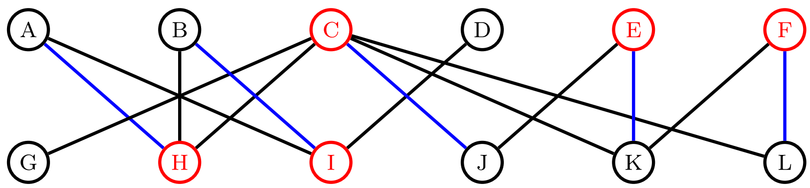
(b) Geben Sie (unter Verwendung von Algorithmen aus der Vorlesung) einen polynomiellen Algorithmus an, der eine Kantenfolge findet, die höchstens doppelt so lang ist wie eine optimale. Begründen Sie kurz, dass Ihr Algorithmus dies tatsächlich leistet. Welche Laufzeit erreichen Sie?



Aufgabe 1 [10 Punkte] C hat recht, wie das Beispiel rechts zeigt: es gibt drei kantendisjunkte s-t-Wege, aber das Entfernen der Kanten des blauen (kürzesten) s-t-Wegs macht t von s aus unerreichbar.
E hat recht, denn es gibt einen polynomiellen Algorithmus für das Problem: man findet sukzessive augmentierende Wege (das war eine Programmieraufgabe).



Aufgabe 2 [5+5 Punkte] Die Menge der fünf roten Knoten ist eine Knotenüberdeckung; sie ist nach dem Satz von König kardinalitätsminimal, weil es ein Matching mit fünf Kanten gibt (blau). Da Knotenüberdeckungen genau die Komplemente von stabilen Mengen sind, ist die stabile Menge der sieben schwarzen Knoten kardinalitätsmaximal.



Aufgabe 3 [5 Punkte] Jede Kante aus B kommt in Frage, außer den höchstens $|A|$ vielen, deren Endpunkte in derselben Zusammenhangskomponente von (V, A) liegen, und den höchstens $|A|$ vielen, die in denselben Knoten hineinführen wie eine Kante von (V, A).

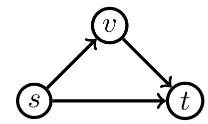
Aufgabe 4 [10 Punkte] Gesucht ist also eine Knotenmenge Y (das Komplement von X) mit $c(Y) \leq \frac{1}{2}c(V(G))$ und zwei Knoten s und t, so dass t von s aus in $G - Y$ unerreichbar ist.

Man ersetzt jeden Knoten v durch zwei Knoten v' und v'' und eine Kante (v', v'') mit Kapazität $c(v)$. Außerdem ersetzt man jede Kante $\{v, w\}$ durch zwei Kanten (v'', w') und (w'', v'), jeweils mit Kapazität $c(V(G))$. Das Ergebnis heiße (G', u).

Für alle $s, t \in V(G)$ mit $s \neq t$ prüfe man (mit einem beliebigen polynomiellen Max-Flow-Algorithmus), ob es einen s''-t'-Fluss mit Wert mehr als $\frac{1}{2}c(V(G))$ in (G', u)

gibt. Dies gilt nach dem Max-Flow-Min-Cut Theorem genau dann, wenn es keine Knotenmenge $Y \subseteq V(G) \setminus \{s,t\}$ gibt, so dass mit $c(Y) \leq \frac{1}{2}c(V(G))$ und t von s aus in $G - Y$ unerreichbar ist.

Aufgabe 5 [3+3+3+3+3 Punkte]



(a) falsch; siehe Beispiel rechts (alle Kapazitäten 1, alle Kosten 0, $b(s) = 1$, $b(t) = -1$).

(b) falsch: ersetze im Beispiel von (a) die Kante (s,t) durch eine Kante (t,s).

(c) richtig: setze $f'' := \frac{f+f'}{2}$.

(d) richtig: $f' - f$ kann als Zirkulation in G_f aufgefasst werden; da diese nicht überall null ist, gibt es in G_f einen Kreis mit Kosten null. Wegen der Ganzzahligkeit kann man entlang dessen f um 1 augmentieren und erhält f'' wie gewünscht.

(e) richtig: ist $e \in E(G_{f'}) \setminus E(G_f)$, so gibt es einen Kreis K mit Kosten null in G_f, der $\overleftarrow{e}$ enthält. Für jedes zulässige Potenzial π in (G_f, c) muss dann $c_\pi(d) = 0$ für alle $d \in E(K)$ sein, also $c_\pi(e) = -c_\pi(\overleftarrow{e}) = 0$.

Aufgabe 6 [3+7 Punkte]

(a) Das Problem "Hamiltonweg mit vorgegebenen Endpunkten" (von dem in der Vorlesung gezeigt wurde, dass es *NP*-vollständig ist) ist auf das vorliegende polynomiell reduzierbar, denn man setzt einfach $c(e) = 1$ für alle Kanten e: nun gibt es genau dann eine s-t-Tour der Länge $n - 1$, wenn es einen Hamiltonweg von s nach t gibt.

(b) Berechne (mit PRIMS ALGORITHMUS in $O(m + n \log n)$ Zeit) einen aufspannenden Baum T von G. Offenbar ist $c(E(T))$ eine untere Schranke für das optimale Gewicht einer s-t-Tour, denn diese enthält ja einen aufspannenden Baum. Sei P der s-t-Weg in T. H entstehe aus T, indem die Kanten von $E(T) \setminus E(P)$ verdoppelt werden und eine Kante $e = \{s,t\}$ hinzugefügt wird. H ist eulersch. Entfernt man e aus einem (mit EULERS ALGORITHMUS in linearer Zeit berechneten) eulerschen Spaziergang in H, so erhält man eine s-t-Tour der Länge höchstens $2c(E(T))$. Die Gesamtlaufzeit ist $O(m + n \log n)$, wobei $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$.