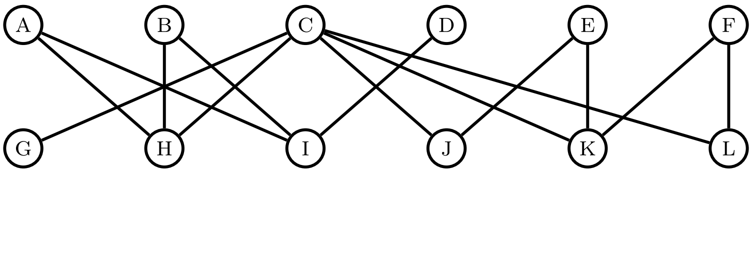
Name:

Aufgabe 1 [10 Punkte] Fünf Studenten (A, B, C, D und E) diskutieren über das Problem, in einem gegebenen ungerichteten Graphen G mit Knoten s und t möglichst viele paarweise kantendisjunkte s-t-Wege zu finden.

- A behauptet, dass folgender Algorithmus funktioniert: nimm einfach irgendeinen s-t-Weg P, lösche dessen Kanten, und iteriere.
- B entgegnet, dass dieser Algorithmus scheitern kann, aber nicht, wenn P immer ein kürzester s-t-Weg ist.
- C meint, dass auch mit dieser Einschränkung eventuell noch nicht einmal halb so viele s-t-Wege gefunden werden wie möglich.
- D ergänzt: Dies ist ja kein Wunder, schließlich ist das Problem ja *NP*-schwer.
- E antwortet: Wenn du wirklich zeigen kannst, dass das Problem *NP*-schwer ist, folgt $P = NP$.

Zwei der fünf haben recht. Wer? Warum?

Aufgabe 2 [5+5 Punkte] Geben Sie im unten abgebildeten Graphen eine stabile Menge maximaler Kardinalität an. Zeigen Sie auf elegante Weise, dass es wirklich keine größere gibt, indem Sie einen geeigneten Satz aus der Vorlesung benutzen.



Aufgabe 3 [5 Punkte] Seien (V, A) und (V, B) zwei Branchings mit derselben Knotenmenge und $2|A| < |B|$. Beweisen Sie, dass es dann eine Kante $e \in B \setminus A$ gibt, so dass $(V, A \cup \{e\})$ ein Branching ist.

Name:

Aufgabe 4 [10 Punkte] Seien G ein ungerichteter Graph und $c : V(G) \to \mathbb{N}$. Skizzieren Sie einen polynomiellen Algorithmus, der entscheidet, ob es eine Knotenmenge $X \subseteq V(G)$ mit $c(X) \geq \frac{1}{2}c(V(G))$ gibt, so dass $G[X]$ unzusammenhängend ist. Die genaue Laufzeit ist unerheblich.

Aufgabe 5 [3+3+3+3+3 Punkte] Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost-Flow-Problems, wobei u und b ganzzahlig seien. Seien f und f' optimale b-Flüsse in (G, u). Welche der folgenden Aussagen gelten dann zwingend? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

(a) Falls $f \neq f'$, so enthält G einen Kreis mit K mit $c(E(K)) = 0$.

(b) Falls G einen Kreis mit K mit $c(E(K)) = 0$ enthält, so ist f nicht der einzige optimale b-Fluss in (G, u).

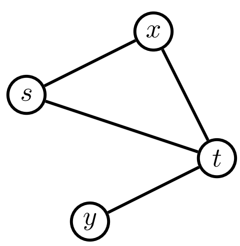
(c) Es gibt einen optimalen b-Fluss f'' in (G, u), so dass die Residualgraphen G_f und $G_{f'}$ Teilgraphen von $G_{f''}$ sind.

(d) Ist f ganzzahlig und $f' \neq f$, so gibt es einen ganzzahligen optimalen b-Fluss f'', der von f verschieden ist.

(e) Jedes zulässige Potenzial in (G_f, c) ist ein zulässiges Potenzial in $(G_{f'}, c)$.

Aufgabe 6 [3+7 Punkte] Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit Gewichten $c : E(G) \to \mathbb{N}$, und $s, t \in V(G)$. Eine Kantenfolge F von s nach t in G, die jeden Knoten mindestens einmal enthält, heißt *s-t-Tour*. Ihre *Länge* ist die Summe ihrer Kantengewichte, wobei mehrfach benutzte Kanten entsprechend oft berücksichtigt werden. Gesucht ist eine s-t-Tour minimaler Länge. (Im Beispiel unten haben alle Kanten Gewicht 1; dann ist die minimale Länge einer s-t-Tour 4: man läuft von s über x, t und y zurück nach t.)

(a) Zeigen Sie, dass dieses Problem *NP*-schwer ist.



(b) Geben Sie (unter Verwendung von Algorithmen aus der Vorlesung) einen polynomiellen Algorithmus an, der eine Kantenfolge findet, die höchstens doppelt so lang ist wie eine optimale. Begründen Sie kurz, dass Ihr Algorithmus dies tatsächlich leistet. Welche Laufzeit erreichen Sie?