Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2006/2007
Abgabe: bis Donnerstag, 18. Januar 2007, **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 9

Aufgabe 34:

Sei $z \in \overset{\circ}{\Sigma}$. Die Abbildung $T_z : \Sigma \to \Sigma$ aus der Vorlesung überführt jede Seite von Σ in sich selber. (Insbesondere sind die Ecken von Σ Fixpunkte von T_z.)

(3 Punkte)

Aufgabe 35:

a) Seien λ und μ reelle Zahlen. Ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ eine optimale Lösung von

$$\min\{\, x_1x_2x_3 : \; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \;\; x_1 + x_2 + x_3 = \lambda, \;\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mu \,\}$$

und gilt $\bar{x}_1 \le \bar{x}_2 \le \bar{x}_3$, dann ist $\bar{x}_2 = \bar{x}_3$.

(Hinweis: Zeige zunächst, dass man ohne Einschränkung von $\lambda = 0$ ausgehen kann, indem du das Problem in den Variablen $y_i := x_i - \frac{1}{3}\lambda$ ausdrückst. Kann der Optimalwert in diesem Fall positiv sein? Wenn der Optimalwert nichtpositiv ist, kann man $\bar{x}_1 < 0 \le \bar{x}_2 \le \bar{x}_3$ folgern. Substitution von $x_1 = -(x_2 + x_3)$ ergibt ein zweidimensionales Problem der Form $\min\{g(x_2, x_3) : (x_2, x_3)^T \in M\}$. Betrachte Abbildung 4 aus der Vorlesung.)

b) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $n \ge 3$. Ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ eine optimale Lösung von

$$\min\{\, x_1x_2\cdots x_n : \;\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda, \;\; x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \mu \,\}$$

und gilt $0 < \bar{x}_1 \le \bar{x}_2 \le \ldots \le \bar{x}_n$, dann ist $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = \ldots = \bar{x}_n$.

c) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \alpha < 1$ ist der Punkt $\mathbb{1} + \alpha(-1, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1})^T$ eine optimale Lösung von $\min\{x_1x_2\cdots x_n : \; x \in B^\star(\mathbb{1}, \alpha r)\}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 36:

Zeigen Sie, dass für alle gerichteten Graphen G und alle $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ die Werte folgender LPs übereinstimmen und gleich der Länge eines kürzesten s-t-Weges in G sind:

$$\min \Big\{ \sum_{e\in E(G)} c(e)x_e : \begin{array}{ll} x_e \geq 0 & (e \in E(G)), \\ \sum_{e\in\delta^+(s)} x_e - \sum_{e\in\delta^-(s)} x_e = 1, & \\ \sum_{e\in\delta^+(v)} x_e - \sum_{e\in\delta^-(v)} x_e = 0 & (v \in V(G) \setminus \{s,t\}) \end{array} \Big\}$$

$$\min \Big\{ \sum_{e\in E(G)} c(e)x_e : \begin{array}{ll} x_e \geq 0 & (e \in E(G)), \\ \sum_{e\in\delta^+(A)} x_e \geq 1 & (A \subset V(G), s \in A, t \notin A) \end{array} \Big\}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 36:

Beweise Theorem 7.7 mit Hilfe von LP-Dualität (Tipp: Benutze Theorem 3.19)

(3 Punkte)