Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2006/2007
Abgabe: bis Donnerstag, 11. Januar 2007, **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 8

Aufgabe 29:

Der in Satz 4.18 beschriebene Algorithmus löst ein LP $\max\{cx : Ax \leq b\}$ mit einer Laufzeit von $O(d^7 s^2)$. Hierbei sei A eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, $d := m + n$ und $s := \text{size}(A) + \text{size}(b) + \text{size}(c)$. (5 Punkte)

Aufgabe 30:

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei $X^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : y^T x \leq 1 \text{ für alle } x \in X\}$.

a) Ist $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, so auch P°.

b) Charakterisiere diejenigen Polyeder P, für die $(P^\circ)^\circ = P$ gilt.

(4 Punkte)

Aufgabe 31:

Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\rho \in \mathbb{R}_+$ sei $B^\star(y, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n,\ ||x - y|| \leq \rho\}$.
Sei $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n,\ x \geq 0\}$.

a) $R := \min\{\rho : \Sigma \subseteq B^\star(\mathbb{1}, \rho)\} = \sqrt{n(n-1)}$.

b) $r := \max\{\rho : B^\star(\mathbb{1}, \rho) \subseteq \Sigma\} = \sqrt{\frac{n}{(n-1)}}$.

(4 Punkte)

Für die Aufgaben 32 und 33 benötigen wir die folgenden Definitionen:

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\text{diag}(x) = \text{diag}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix mit $\text{diag}(x)_{ii} = x_i$ und $\text{diag}(x)_{ij} = 0 \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j)$.

Sei außerdem $\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n,\ x \geq 0\}$ und $\overset{\circ}{\Sigma} := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n,\ x > 0\}$.

Aufgabe 32:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $z \in \mathring{\Sigma}$ mit $Az = 0$.
Für $y \in \mathbb{R}^n$ und $\rho \in \mathbb{R}_+$ sei $B^\star(y,\rho) := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n,\ ||x-y|| \le \rho\}$.
Es existiere ein $\bar{x} \in \Sigma$ mit $A\,\mathrm{diag}(z)\,\bar{x} = 0$ und $\bar{x}_1 = 0$.

a) Sei v die Orthogonalprojektion des Einheitsvektors e_1 auf den Untervektorraum $U := \{x \in \mathbb{R}^n : A\,\mathrm{diag}(z)\,x = 0,\ \mathbb{1}^T x = 0\}$. Zeige: $v \neq 0$.

   (Anleitung: Der Vektor $\mathbb{1} - \bar{x}$ liegt in U, woraus $e_1 \notin U^\perp$ folgt.)

Wir setzen nun $\tilde{x}_\rho := \mathbb{1} - \frac{\rho}{||v||} v$ für $\rho \in \mathbb{R}_+$ (was wegen $||v|| > 0$ erlaubt ist).

b) $\tilde{x}_\rho \in Q_\rho := \{x \in B^\star(\mathbb{1},\rho) :\ A\,\mathrm{diag}(z)\,x = 0\}$.

c) $e_1^T \tilde{x}_\rho = 1 - \rho||v||$.

d) Für alle $q \in Q_\rho$ gilt $e_1^T q \ge 1 - \rho||v||$.

   (Anleitung: Zeige $\mathbb{1} - q =: u \in U$ und benutze die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für v und u.)

e) Ist $q \in Q_\rho$ mit $e_1^T q = 1 - \rho||v||$, so ist $q = \tilde{x}_\rho$.

   (Anleitung: Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung wird genau dann mit Gleichheit erfüllt, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.)

Der Vektor $\tilde{x}_\rho$ ist also eindeutig bestimmte optimale Lösung von $\min\{q_1 : q \in Q_\rho\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 33:

In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie der Vektor v aus Aufgabe 32 berechnet werden kann.
Sei $m < n$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit $\mathrm{Rang}(A) = m$ und $A\mathbb{1} = 0$. Sei $z \in \mathring{\Sigma}$ mit $Az = 0$. Zeige: Die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} A\,\mathrm{diag}(z) \\ \mathbb{1}^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$$

hat Rang $m+1$. (Bekanntlich folgt daraus die Invertierbarkeit von BB^T.)
Zeige, dass sich die orthogonale Projektion v des Vektors e_1 auf den Untervektorraum U aus Aufgabe 32 durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} B^T & I \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ermitteln lässt und dass dieses Gleichungssystem genau eine Lösung hat, nämlich

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (BB^T)^{-1}B \\ I - B^T(BB^T)^{-1}B \end{pmatrix} e_1.$$

(5 Punkte)