Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2006/2007
Abgabe: bis Donnerstag, 14. Dezember 2006, **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 7

Aufgabe 26:

Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung sei $Z = (B \quad C)$ die Arbeitsmatrix nach Beendigung des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Eingabematrix A. Hierbei seien $B = \begin{pmatrix} I & R \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} (A')^{-1} & 0 \\ M & I \end{pmatrix}$, und es sei $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A' & U \\ V & W \end{pmatrix} = (A_{\mathrm{row}(i),\mathrm{col}(j)})_{i\in\{1,\ldots,m\},j\in\{1,\ldots,n\}}$ die umsortierte Inputmatrix.

a) Zeige: $\begin{pmatrix} A' \\ V \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix}$.

Sei $S := \{\mathrm{col}(j) : j = 1, \ldots, r\}$. Betrachte einen Index $\gamma \in \{1, \ldots, n\} \setminus S$ und $\delta \in \{r+1, \ldots, n\}$ mit $\gamma = \mathrm{col}(\delta)$. Sei $\tilde{w} \in \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{w}_h := 0$ für $h \notin S$ und $\tilde{w}_h := z_{j,\delta} = R_{j,\delta-r}$ für $h \in S$ mit $h = \mathrm{col}(j)$. Sei $w := \tilde{w} - e_\gamma$.

b) Zeige: $Aw = 0$, d. h. $x_\gamma = \sum_{h\in S} w_h x_h$, wenn $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^m$ die Spalten von A sind.

(Für jeden Index $\gamma \notin S$ kann man also den Spaltenvektor x_γ als Linearkombination von $\{x_h : h \in S\}$ schreiben und die Koeffizienten hierfür direkt aus Z ablesen.)

(5 Punkte)

Aufgabe 27:

Seien $X := \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ und $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \mathrm{conv}(X)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Aus Aufgabe 15 wissen wir, dass x sogar eine Konvexkombination aus einer affin unabhängigen Teilmenge von X ist. Es bezeichne P_1 das Problem, aus X und λ die Koeffizienten einer solchen Konvexkombination zu berechnen. Gesucht ist ein Algorithmus mit Laufzeit $O((m+n)^3)$ für P_1.

a) Betrachte das entsprechende Problem P_2 für konische Kombinationen: Ein Vektor $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \mathrm{cone}(X)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$ soll als nichtnegative Linearkombination einer linear unabhängigen Teilmenge von X dargestellt werden. Zeige: Gibt es einen Algorithmus mit Laufzeit $O((m+n)^3)$ für P_2, so gibt es auch einen Algorithmus mit Laufzeit $O((m+n)^3)$ für P_1.

Im Folgenden soll ein $O((m+n)^3)$-Algorithmus für P_2 gefunden werden.

b) Benutze Aufgabe 26, um einen Vektor w mit $w_1x_1 + \ldots + w_nx_n = 0$ zu finden. Gib eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so dass $\mu := \lambda + \alpha w$ nichtnegativ ist und in μ gegenüber λ eine weitere Komponente Null ist.

c) Iteriere diese Methode durch Wiederholung eines Teils des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Gib damit einen $O((m+n)^3)$-Algorithmus für P_2 an.

(7 Punkte)

Aufgabe 28:

Sei $E(A,x) \in \mathbb{R}^n$ ein Ellipsoid und $a \in \mathbb{R}^n$, und sei $E' = \{z \in E(A,x) : az \geq ax\}$. Zeige, dass das Ellipsoid $E(A', b')$ mit $A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1}bb^T\right)$, $x' = x + \frac{1}{n+1}b$ und $b = \frac{1}{\sqrt{a^T A a}}Aa$ das Halbellipsoid E' enthält.

(4 Punkte)