Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2006/2007
Abgabe: bis Donnerstag, 7. Dezember 2006, **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 6

Aufgabe 22:

Zeige, dass im Beweis von Proposition 4.3 gilt, dass $|\det A| \leq \prod_{i,j} (|p_{ij}| + 1)$ und $|q| \leq \prod_{i,j} |q_{ij}|$. (2 Punkte)

Aufgabe 23:

Sei $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonaccizahlen, d. h. $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Zeige, dass $\mathrm{ggT}(F_i, F_j) = F_{\mathrm{ggT}(i,j)}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Nutze, dass $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$, um zu zeigen, dass F_n Teiler von F_{kn} ist für alle $k, n \in \mathbb{N}, k > 0$. Wende dann den Euklidischen Algorithmus an. (3 Punkte)

Aufgabe 24:

a) Begründe, warum das Gauss'sche Eliminationsverfahren in der in der Vorlesung vorgestellten Form kein streng polynomieller Algorithmus ist. (2 Punkte)

b) Wie kann man das Gauss'sche Eliminationsverfahren implementieren, so dass es streng polynomielle Laufzeit erreicht? (3 Punkte)

Aufgabe 25:

Seien $n \geq 2$, $c \in \mathbb{R}^n$ ein Zeilenvektor und $y_1, \ldots, y_k \in \{-1, 0, 1\}^n$ Spaltenvektoren mit $0 < cy_{i+1} \leq \frac{1}{2}cy_i$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Beweise, dass dann $k \leq 3n \log_2 n$ gilt.

(Anleitung: Wieso genügt es, die Aussage für $c \geq 0$ zu beweisen? Besitzt das Polyeder $\{x \in \mathbb{R}^n : \ (y_i - 2y_{i+1})^T x \geq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq k-1, \ y_k^T x = 1, \ x \geq 0\}$ zulässige Lösungen? Besitzt es Ecken? Wie lässt sich eine Ecke x als eindeutig bestimmte Lösung eines linearen Gleichungssystems schreiben? Die Koeffizienten dieses linearen Gleichungssystems sind ganzzahlig. Kann man ihre Beträge nach oben abschätzen? Nach welcher bekannten Rechenregel kann man die Komponenten von x bestimmen? Beweise die Abschätzung $2^k \leq 2n3^n n! \leq n^{3n}$ für $n \geq 3$ und benutze für $n = 2$ ein Ganzzahligkeitsargument.) (6 Punkte)