Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2006/2007
Abgabe: bis Donnerstag, 23. November 2006, **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 4

Aufgabe 14:

Zeige: Jedes Polyeder hat eine Darstellung als Summe

$$Q + C = \{q + c : \ q \in Q, \ c \in C\}$$

aus einem Polytop Q und einem polyedrischen Kegel C. (4 Punkte)

Aufgabe 15:

a) Beweise Carathéodory's Theorem:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y \in \operatorname{conv}(X)$. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$, so dass $y \in \operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_{n+1}\})$. (Carathéodory, 1911) (2 Punkte)

b) Beweise die folgende Erweiterung von Carathéodory's Theorem:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y, z \in \operatorname{conv}(X)$. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$, so dass $y \in \operatorname{conv}(\{z, x_1, \ldots, x_n\})$. (3 Punkte)

Aufgabe 16:

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $|X| = n + 2$. Dann gibt es disjunkte Teilmengen X', X'' von X mit $\operatorname{conv}(X') \cap \operatorname{conv}(X'') \neq \emptyset$. (2 Punkte)

Aufgabe 17:

Sei P ein Polyeder und F eine Fläche von P. Zeige, dass

$$C := \{c : cz = \max\{cx : x \in P\} \text{ für alle } z \in F\}$$

ein polyedrischer Kegel ist. Zeige zudem, dass C rational ist, wenn P rational ist.
(5 Punkte)