Mathematische Optimierung I
Wintersemester 2006/2007
Abgabe: bis Donnerstag, 2. November 2006, **vor** der Vorlesung

# Übungsblatt 2

**Aufgabe 5:**
Eine Firma hat sich verpflichtet, in den nächsten $w$ Wochen $r_1+\cdots+r_w$ Einheiten einer Ware herzustellen und zu liefern. Dabei sollen nach Plan jeweils am Ende von Woche $i$ genau $r_i$ Einheiten geliefert werden ($i = 1, \ldots, w$). Pro Einheit, die zu spät geliefert wird, sind wöchentlich $p$ Euro Vertragsstrafe bis zur Lieferung zu zahlen; pro Einheit, die zu früh fertig gestellt wird, fallen wöchentlich pauschal $s$ Euro Lagerkosten an. Bis zum Ende der $w$-ten Woche muss die vereinbarte Gesamtmenge in jedem Fall geliefert werden. Zu Beginn verfügt die Firma über $g$ Arbeiter und $h$ vorhandene Einheiten der Ware (für die in der ersten Woche bereits Lagerkosten fällig sind).
Ein ausgebildeter Arbeiter kann in jeder Woche entweder in der Produktion oder als Ausbilder eingesetzt werden. In der Produktion kann er in einer Woche $k$ Einheiten der Ware herstellen. Als Ausbilder kann er in einer Woche $l-1$ neu eingestellte Arbeiter anlernen (d. h. er kann $l$ ausgebildete Arbeiter für die nächste Woche „produzieren", ihn selbst eingeschlossen). Der wöchentliche Arbeitslohn für einen ausgebildeten Arbeiter beträgt $m$ Euro, wenn er in der Produktion tätig ist; das gilt auch, wenn er in dieser Woche weniger als die maximal möglichen $k$ Einheiten zu produzieren hat. Die Lohnkosten für einen Ausbilder und $l-1$ Auszubildende betragen pro Ausbildungswoche insgesamt $n$ Euro. Außerdem kostet es die Firma $f$ Euro, einen Arbeiter zu entlassen. Am Ende der letzten Woche muss die gesamte Belegschaft angesichts ausgedehnter Umbaumaßnahmen an den Produktionsstätten entlassen werden.
Gesucht ist ein Zeitplan für die Einstellung, Ausbildung und Entlassung von Arbeitern und ihren Einsatz in den $w$ Wochen (Produktion oder Mitarbeiterausbildung) sowie für die Herstellung und Lagerung der Ware, durch den die Kosten der Firma minimiert werden. Dies soll durch ein LP geschehen, für das sich ein optimaler Zeitplan aus einer Optimallösung ablesen lässt. Formuliere ein geeignetes LP und gib die genaue Bedeutung aller Variablen an.
(Bemerkung: Falls sich später beim Lösen des LPs eventuell keine ganzzahlige Optimallösung finden lässt, so kann dies aufgrund der Größe des Auftrages und der ohnehin im Modell vorhandenen Vereinfachung der realen Situation vernachlässigt werden.)

(3 Punkte)

**Aufgabe 6:**
Sei $m_i$ die i-te Stelle Deiner Matrikelnummer (falls Deine Matrikelnummer weniger als sieben Stellen hat, fülle sie mit führenden Nullen auf).
Gegeben sei nun das Lineare Programm $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -100 - m_1 & 100 + m_7 \\ 9 - m_3 - m_5 & 100 \\ 100 + m_2 & 100 + m_6 \end{pmatrix}$$

sowie $b := (5000, 15000, 35000)$ und $c := (9 - m_6 - m_4, m_5 - m_7)$.

Gib bitte zunächst Deine Matrikelnummer und das resultierende LP an, formuliere dann das dazu duale LP, löse beide LP's mit einer Methode Deiner Wahl und gib jeweils eine Optimallösung an (oder zeige Unbeschränktheit oder Nichtexistenz einer Lösung). Es genügt eine Abgabe pro Gruppe! (3 Punkte)

**Aufgabe 7:**
Ist $P$ ein Polyeder und $F$ eine Facette von $P$, dann gilt $\dim F = \dim P - 1$.
(3 Punkte)

**Aufgabe 8:**
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine $m \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor.

a) Sei $X := \begin{pmatrix} -I & 0 \\ A & I \end{pmatrix}$ und $b' := \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$. Sei außerdem $N := \{1, \ldots, n\}$ und $M := \{n+1, \ldots, n+m\}$, und für eine Indexmenge $J \subseteq N \cup M$ mit $|J| = n$ sei $X_J$ ($X^J$) die Submatrix von X, die nur aus den Zeilen (Spalten) von $X$ in $J$ besteht. Zeige: $X_J^N$ nichtsingulär $\Leftrightarrow$ $X_M^{\bar{J}}$ nichtsingulär, wobei $\bar{J} := (N \cup M) \setminus J$. (1 Punkt)

b) Sei $P := \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Zeige mit Hilfe von a), dass $x$ eine Ecke von $P$ ist genau dann, wenn $x \in P$ und die zu positiven Einträgen von $x$ korrespondierenden Spalten von $A$ linear unabhängig sind. (3 Punkte)

c) Sei $(x, y) \in P := \{(x, y) \mid Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0\}$. Zeige mit Hilfe von b): $(x, y)$ ist eine Ecke von $P$ genau dann, wenn die zu positiven Einträgen von $(x, y)$ korrespondierenden Spalten von $(AI)$ linear unabhängig sind.
(1 Punkt)

d) Sei $P$ wie in c). Zeige: $x$ Ecke von $\{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ genau dann, wenn $(x, b - Ax)$ Ecke von $P$. (2 Punkte)