

Mathematische Optimierung I

Wintersemester 2006/2007

Abgabe: bis Donnerstag, 26. Oktober 2006, **vor** der Vorlesung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Seien $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & -10 \end{pmatrix}^T$ und $b = (1 \ 4 \ 8 \ 4 \ 2 \ 5 \ -11)^T$.

Löse für die folgenden Zielfunktionsvektoren c das LP $\max\{cx : Ax \leq b\}$ graphisch und gib jeweils die Menge der optimalen Lösungen an:

- a) $c = (0, -3)$
- b) $c = (1, 2)$
- c) $c = (1, -2)$

Sei P das Polyeder der zulässigen Lösungen des LPs. Wie viele null-, ein- und zweidimensionale Seiten hat P ? Gib für jede der drei Dimensionen eine Seite als Beispiel an, und zwar in der Form $F = \{x \in P : cx = \delta\}$ und in der Form $F = \{x \in P : A'x = b'\}$. Hierbei ist c ein Zeilenvektor, δ eine reelle Zahl und $A'x \leq b'$ ein Teilsystem von $Ax \leq b$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

Gib notwendige und hinreichende Bedingungen für die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ an, so dass das LP $\max\{x + y : \alpha x + \beta y \leq \gamma; x, y \geq 0\}$

- a) eine optimale Lösung besitzt;
- b) keine zulässige Lösung besitzt;
- c) unbeschränkt ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 3:

Eine kleine Raffinerie stellt aus fünf Rohölsorten zwei Sorten Benzin her, nämlich Normal und Super. Die Anzahl der pro Tag verfügbaren Menge jeder Rohölsorte sowie ihr *Performance-Rating* und Preis sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Sorte	Performance-Rating	Barrel pro Tag	Kosten pro Barrel (in \$)
1	70	2000	0,80
2	80	4000	0,90
3	85	4000	0,95
4	90	5000	1,15
5	99	5000	2,00

Das Performance-Rating von Normalbenzin darf 85 nicht unterschreiten; Super muss mindestens 95 haben. Das Performance-Rating einer Mischung verhält sich proportional, d. h. eine 50-50-Mischung von Typ 1 und 2 hat ein Performance-Rating von 75. Die Raffinerie erzielt für ein Barrel Super 3,75 Dollar und für ein Barrel Normalbenzin 2,85 Dollar. Sie ist vertraglich verpflichtet, pro Tag mindestens 8000 Barrel Super zu produzieren.

Formuliere ein lineares Programm, das den Gewinn der Raffinerie maximiert, und gib die Bedeutung der benutzten Variablen an.

(4 Punkte)

Aufgabe 4:

Ein Polyeder ist genau dann volldimensional, wenn es einen Punkt in seinem Inneren gibt.

(8 Punkte)