Diskrete Mathematik I

12. Übung

1. Zeigen Sie, dass dass Maximum-Flow-Problem ein Spezialfall des Minimum-Cost-Flow-Problems ist. (1 Punkt)

2. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, und sei $b : V(G) \to \mathbb{R}$ gegeben mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen b-Fluss in G gibt, wenn
$$\sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \geq \sum_{v \in X} b(v) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G).$$
(2 Punkte)

3. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Für zwei Knoten $v, w \in V(G)$ sei κ_{vw} die minimale Kapazität eines v-w-Schnittes, die wir als die *lokale Kantenkonnektivität* von v und w bezeichnen.

   (i) Zeigen Sie: $\kappa_{ik} \geq \min(\kappa_{ij}, \kappa_{jk})$ für alle (paarweise verschiedenen) $i, j, k \in V(G)$. (1 Punkt)

   (ii) Seien nun κ_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ nichtnegative Zahlen mit $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$ und $\kappa_{ik} \geq \min(\kappa_{ij}, \kappa_{jk})$ für alle paarweise verschiedenen $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es einen ungerichteten Graphen G gibt, dessen lokale Kantenkonnektivitäten genau durch die κ-Werte angegeben werden. (2 Punkte)

   Tipp: Betrachten Sie einen gewichtsmaximalen Spannbaum in (K_n, c) mit Kantengewichten $c(\{i, j\}) := \kappa_{ij}$.

4. Sei G ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Seien $s, t \in V(G)$ und $\delta(A)$ ein gewichtsminimaler s-t-Schnitt in (G, u). Wähle nun $s', t' \in V(G) \setminus A$ und konstruiere (G', u') aus (G, u) durch Kontraktion von A zu einem Knoten. Zeigen Sie, dass dann $\delta(K \cup A)$ für jeden gewichtsminimalen s'-t'-Schnitt $\delta(K \cup \{A\})$ in (G', u') ein gewichtsminimaler s'-t'-Schnitt in (G, u) ist. (2 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 03.02.04 vor der Vorlesung.