Diskrete Mathematik I

11. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit Kantenkapazitäten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ und $r \in V(G)$. Kann man in polynomieller Zeit

   a) einen r-Schnitt mit minimaler Kapazität bestimmen? (1 Punkt)

   b) einen gerichteten Schnitt mit minimaler Kapazität bestimmen, falls G nicht stark zusammenhängend ist? (1 Punkt)

2. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, so dass $G - t$ eine Arboreszenz ist. Zeigen Sie, wie man in diesem Fall in linearer Zeit einen maximalen s-t-Fluss finden kann. (1 Punkt)

3. Ein gerichteter Graph G mit der Eigenschaft, dass es für je zwei Knoten $s, t \in V(G)$ k kantendisjunkte s-t-Pfade gibt, heißt *stark k-zusammenhängend.*

   Sei G ein stark k-zusammenhängender gerichteter Graph und H ein gerichteter Graph mit $V(H) = V(G)$ und $|E(H)| = k$. Zeigen Sie, dass die Instanz (G, H) des gerichteten Kantendisjunkte-Wege-Problems eine Lösung besitzt. (2 Punkte)

4. Gegeben sei ein azyklischer gerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, wie man das maximale Gewicht eines gerichteten Schnittes in G finden kann, indem man das Problem auf ein Minimum-Cut-Problem reduziert.

   Tipp: Fügen sie zwei neue Knoten s und t sowie Kanten (s, v) und (v, t) für jeden Knoten $v \in V(G)$ zu G hinzu und definieren Sie geeignete Kantengewichte.

   (3 Punkte)

$\longrightarrow$

5. **Programmieraufgabe:** Programmieren Sie den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus von Fujishige für das Maximum-Flow-Problem.

   Ihr Programm soll einen gerichteten Graphen G mit Kantenkapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ sowie Quell- und Senkenknoten $s, t \in V(G)$ aus einer ASCII-Textdatei mit folgendem Format einlesen:

   - Die erste Zeile enthält die Anzahl $|V(G)|$ der Knoten.
   - Die zweite Zeile enthält die Nummer $s \in \{0, \ldots, |V(G)|-1\}$ des Quellknotens.
   - Die dritte Zeile enthält die Nummer $t \in \{0, \ldots, |V(G)|-1\}$ des Senkenknotens.
   - Die übrigen Zeilen definieren die Kantenmenge $E(G)$ und die Kantenkapazitäten durch Angabe dreier durch Leerzeichen getrennter Zahlen auf jeder Zeile. Die ersten beiden Zahlen liegen in $\{0, \ldots, |V(G)| - 1\}$ und geben zwei Knoten an, die eine vom ersten zum zweiten Knoten orientierte Kante definieren. Die dritte Zahl gibt die Kapazität dieser Kante an.

   Ihr Programm soll den Wert eines maximalen s-t-Flusses in (G, u) ausgeben sowie die Flusswerte auf allen Kanten des Graphen für einen solchen Fluss. (16 Punkte)

Abgabe Aufg. 1-4 bis spätestens Di, den 27.01.04 vor der Vorlesung.

Abgabe Aufg. 5 bis spätestens Di, den 03.02.04 vor der Vorlesung.