Diskrete Mathematik I

10. Übung

1. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk, und seien $\delta^+(X)$ und $\delta^+(Y)$ bzgl. u minimale s-t-Schnitte in (G, u). Zeigen Sie, dass auch $\delta^+(X \cup Y)$ und $\delta^+(X \cap Y)$ bzgl. u minimale s-t-Schnitte in (G, u) sind. (2 Punkte)

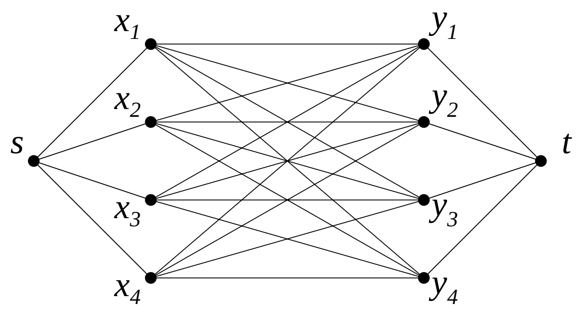
2. Zeigen Sie, dass der Ford-Fulkerson-Algorithmus bei irrationalen Kantenkapazitäten nicht immer terminiert. (4 Punkte)

   Tipp: Betrachten Sie das unten abgebildete Netzwerk:

   Alle Linien repräsentieren Kanten in beide Richtungen. Alle Kanten haben Kapazität $S = \frac{1}{1-\sigma}$, außer

   $$u((x_1, y_1)) = 1,\ u((x_2, y_2)) = \sigma,\ u((x_3, y_3)) = u((x_4, y_4)) = \sigma^2,$$

   wobei $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



3. (i) Beweisen Sie Hoffmann's Zirkulationstheorem: Gegeben ein gerichteter Graph G mit Mindest- und Höchstkapazitäten $l, u : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $l(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$, existiert eine Zirkulation f mit $l(e) \le f(e) \le u(e)$ für alle $e \in E(G)$ genau dann, wenn

   $$\sum_{e \in \delta^-(X)} l(e) \le \sum_{e \in \delta^+(X)} u(e) \quad \text{für alle } X \subseteq V(G).$$

   (2 Punkte)

   (ii) Zeigen Sie, dass (i) das Max-Flow-Min-Cut-Theorem impliziert. (1 Punkt)

4. Sei ein Netzwerk (G, u, s, t) und ein maximaler s-t-Fluss f darin gegeben. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion gibt zwischen der Menge der Knotenmengen X, für die $\delta^+_G(X)$ ein bzgl. u minimaler s-t-Schnitt in (G, u) ist, und der Menge der Knotenmengen Y, für die $\delta^+_{G_f}(Y)$ ein gerichteter t-s-Schnitt im Residualgraphen G_f ist. (2 Punkte)

5. (i) Gegeben seien ein azyklischer gerichteter Graph G, Kantengewichte $w : E(G) \to \mathbb{R}$, und $s, t \in V(G)$. Zeigen Sie, wie die Vereinigung aller längsten s-t-Pfade in G in Linearzeit gefunden werden kann. (1 Punkt)

   (ii) Sei G ein azyklischer gerichteter Graph mit Abbildungen $\sigma, \tau, c : E(G) \to \mathbb{R}_+$, und eine Zahl $C \in \mathbb{R}_+$ gegeben. Wir fragen nach einer Abbildung $x : E(G) \to \mathbb{R}_+$, für die $\sigma(e) \leq x(e) \leq \tau(e)$ für alle $e \in E(G)$ gilt und $\sum_{e \in E(G)} (\tau(e) - x(e))c(e) \leq C$ ist. Unter den zulässigen Lösungen wollen wir die bzgl. x größte Länge eines Pfades in G minimieren.

   Die Bedeutung dieser Aufgabe ist die folgende: Die Kanten korrespondieren zu Jobs, $\sigma(e)$ und $\tau(e)$ stehen für die minimale und maximale Bearbeitungszeit für Job e, und $c(e)$ gibt die Kosten für die Reduzierung der Bearbeitungszeit von Job e um eine Zeiteinheit an.

   Wenn es zwei Jobs $e = (i, j)$ und $e' = (j, k)$ gibt, muss die Bearbeitung von Job e beendet sein, bevor die Bearbeitung von Job e' aufgenommen werden kann. Es gibt ein festes Budget C, und das Ziel ist es, die Gesamtbearbeitungszeit für alle Jobs zu minimieren.

   Zeigen Sie, wie dieses Problem mit Netzwerkflusstechniken gelöst werden kann. (4 Punkte)

   Tipp: Fügen Sie eine Quelle s und eine Senke t ein, starten Sie mit $x = \tau$, und reduzieren Sie schrittweise mit kleinstmöglichen Kosten die Länge eines bzgl. x längsten s-t-Pfades. Verwenden Sie (i).

Abgabe bis spätestens Di, den 20.01.04 vor der Vorlesung.