Diskrete Mathematik I

9. Übung

1. Gegeben sei ein ungerichteter Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$ und ein Knoten $v \in V(G)$. Wie können Sie in polynomieller Zeit einen Spannbaum minimalen Gewichtes finden, in dem v kein Blatt ist? (1 Punkt)

2. Gegeben sei ein ungerichteter Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Wie kann man in $O(|V(G)||E(G)|)$-Zeit die Vereinigung der Kantenmengen aller Spannbäume minimalen Gewichtes in G finden? (1 Punkt)

3. Beweisen oder widerlegen Sie, dass das Minimum-Spanning-Tree-Problem durch das folgende Verfahren gelöst wird: Durchlaufe die Kanten des Eingabegraphen nach nicht-aufsteigendem Gewicht sortiert und lösche eine Kante immer dann, wenn sie keine Brücke ist. (2 Punkte)

4. Für eine endliche Punktmenge $V \subset \mathbb{R}^2$ besteht ihr Voronoï-Diagramm aus den Regionen
$$P_v := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : ||x - v||_2 = \min_{w \in V} ||x - w||_2 \right\}$$
für $v \in V$. Die Delaunay-Triangulation von V ist der Graph
$$(V,\ \{\{v, w\} \subseteq V,\ v \neq w,\ |P_v \cap P_w| > 1\}).$$
Ein minimaler Spannbaum für V ist ein Baum T mit $V(T) = V$ (und $E(T) \subseteq V \times V$), dessen Länge $\sum_{\{v,w\} \in E(T)} ||v - w||_2$ minimal ist.

   a) Zeigen Sie, dass die Delaunay-Triangulation *fast* eine Triangulation ist (d.h., dass alle Flächen bis auf die äußere von genau drei Kanten begrenzt werden), wenn keine vier Punkte in V auf einem gemeinsamen Kreis (im geometrischen Sinne) liegen. (1 Punkt)

   b) Zeigen Sie, dass jeder minimale Spannbaum für V ein Subgraph der Delaunay-Triangulation ist. (3 Punkte)

   Anmerkung: Da man die Delaunay-Triangulation in $O(|V| \log |V|)$-Zeit berechnen kann, ergibt sich daraus ein Algorithmus mit $O(|V| \log |V|)$-Laufzeit zur Berechnung eines minimalen Spannbaums für eine Menge V von Punkten in der Ebene.

5. Wie kann man in Linearzeit entscheiden, ob ein gerichteter Graph eine aufspannende Arboreszenz enthält? (2 Punkte)

6. Sei G ein gerichteter Graph und $r \in V(G)$.

a) Zeigen Sie, dass G genau dann die disjunkte Vereinigung von k aufspannenden Arboreszenzen mit Wurzel r ist, wenn der G zugrunde liegende ungerichtete Graph die disjunkte Vereinigung von k Spannbäumen ist und $|\delta^-(x)| = k$ für alle $x \in V(G) \setminus r$. (3 Punkte)

b) G enthalte k kantendisjunkte Wege von r zu jedem anderen Knoten, aber das Entfernen einer beliebigen Kante zerstöre diese Eigenschaft. Zeigen Sie, dass dann jeder Knoten $v \in V(G) \setminus \{r\}$ genau k eingehende Kanten besitzt. (3 Punkte)

7. **Programmieraufgabe:** Implementieren Sie Edmond's Branching-Algorithmus.

Ihr Programm soll einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten aus einer ASCII-Textdatei mit folgendem Format einlesen:

– Die erste Zeile enthält die Anzahl $|V(G)|$ der Knoten.

– Die übrigen Zeilen definieren die Kantenmenge $E(G)$ und die Kantengewichte durch Angabe dreier durch Leerzeichen getrennter Zahlen auf jeder Zeile. Die ersten beiden Zahlen liegen in $\{0, \dots, |V(G)| - 1\}$ und geben zwei Knoten an, die eine vom ersten zum zweiten Knoten orientierte Kante definieren. Die dritte Zahl gibt das Gewicht dieser Kante an.

Ihr Programm soll eine Liste aller Kanten in einem gewichtsmaximalen Branching in G ausgeben sowie dessen Gesamtgewicht. (16 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 13.01.04 vor der Vorlesung.