Diskrete Mathematik I

8. Übung

1. Seien (V, T_1) und (V, T_2) zwei Bäume auf derselben Knotenmenge V. Zeigen Sie, dass für jede Kante $e \in T_1$ eine Kante $f \in T_2$ existiert, so dass sowohl $(V, (T_1 \setminus \{e\}) \cup \{f\})$ als auch $(V, (T_2 \setminus \{f\}) \cup \{e\})$ Bäume sind. (2 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass die listenchromatische Zahl jedes planaren Graphen höchstens 6 ist. Verwenden Sie nicht den 5-Farben-Satz. (2 Punkte)

3. Sei G ein ungerichteter Graph, $\chi(G)$ seine chromatische Zahl und $\chi_l(G)$ seine listenchromatische Zahl. Zeigen Sie

   $$\chi(G), \chi_l(G) \leq \max_{H \subseteq G} \min_{v \in V(H)} |\delta_H(v)|,$$

   wobei $H \subseteq G :\Leftrightarrow H$ ist Subgraph von G.
   Tipp: Betrachten Sie einen Greedy-Algorithmus, der die Knoten in einer geeigneten Reihenfolge färbt. (3 Punkte)

4. Geben Sie für jedes $k \in \mathbb{Z}_+$ einen Graphen G an mit $\chi(G) = 2$ und $\chi_l(G) \geq k$.
   Tipp: Betrachten Sie einen bipartiten Graphen mit k Knoten auf einer der beiden Seiten und Farbenlisten, die k-elementige Teilmengen einer k^2-elementigen Menge sind. (3 Punkte)

5. Zeigen Sie, dass es höchstens 4^{n-1} paarweise nicht isomorphe Bäume mit n Knoten gibt.
   Tipp: Betrachten Sie die Abarbeitung des DFS-Algorithmus' auf einem Baum, und notieren Sie eine 0 bei einem Rekursionsabstieg und eine 1 bei einem Rekursionsaufstieg. Wieviele verschiedene 0-1-Folgen können Sie so konstruieren? Wie folgt die Behauptung daraus? (3 Punkte)

6. Zeigen Sie, dass es mindestens e^{n-1}/n^3 paarweise nicht isomorphe Bäume mit n Knoten gibt.
   Tipp: Verwenden Sie die Cayley-Formel und eine Abschätzung für $n!$. (3 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 16.12.03 vor der Vorlesung.