Diskrete Mathematik I

7. Übung

1. Sei G ein gerichteter Graph mit einer planaren Einbettung. Zeigen Sie, dass sein dualer planarer Graph G^* stark zusammenhängend bzw. azyklisch ist, falls G azyklisch bzw. stark zusammenhängend ist. Gilt auch die Umkehrung? (2 Punkte)

2. Sei G ein ungerichteter Graph mit einer planaren Einbettung und G^* sein dualer planarer Graph. Zeigen Sie:

   a) Wenn G dreifach zusammenhängend ist, dann ist auch G^* dreifach zusammenhängend. (2 Punkte)

   b) Wenn G vierfach zusammenhängend ist, muss G^* nicht vierfach zusammenhängend sein. (1 Punkt)

2. Ein ungerichteter Graph G heißt *outerplanar*, wenn er eine planare Einbettung besitzt, in der jeder seiner Knoten auf dem Rand der äußeren Fläche liegt. Zeigen Sie, dass G genau dann outerplanar ist, wenn weder K_4 noch $K_{2,3}$ Minoren von G sind. (2 Punkte)

4. Seien G und H ungerichtete Graphen. Gegeben eine Kante $e = \{v, w\} \in E(G)$, sagen wir, dass H aus G durch *Unterteilung von e* entsteht, wenn $V(H) = V(G)\dot{\cup}\{x\}$ und $E(H) = (E(G) \setminus \{e\}) \cup \{\{v, x\}, \{x, w\}\}$. Ein Graph, der durch eine Folge von Unterteilungen von Kanten aus G hervorgeht, heißt *Unterteilung* von G.
   Zeigen Sie:

   a) Enthält H eine Unterteilung von G als Subgraphen, dann ist G ein Minor von H. Gilt auch die Umkehrung (Beweis oder Gegenbeispiel)? (1 Punkt)

   b) Falls $\max_{v \in V(G)} |\delta_G(v)| \leq 3$ ist und G ein Minor von H ist, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Subgraphen. (2 Punkte)

   c) $K_{3,3}$ ist ein Minor von G, falls K_5 Minor von G ist, aber keine Unterteilung von K_5 als Subgraph in G enthalten ist. (4 Punkte)

   d) Folgern Sie aus den obigen Ergebnissen und dem Satz von Kuratowski aus der Vorlesung, dass ein Graph G genau dann planar ist, wenn keiner seiner Subgraphen eine Unterteilung von $K_{3,3}$ oder K_5 ist. (2 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 09.12.03 vor der Vorlesung.