Diskrete Mathematik I

4. Übung

1. Sei G ein ungerichteter Graph. Der *Line Graph* von G ist der Graph $(E(G), F)$ mit $F = \{\{e_1, e_2\} : e_1, e_2 \in E(G), |e_1 \cap e_2| = 1\}$. Zeigen Sie, dass der Line Graph eines ungerichteten und zusammenhängenden Graphen G einen Hamiltonschen Kreis enthält, wenn G Eulersch ist. Gilt auch die Umkehrung? (2 Punkte)

2. a) Zeigen Sie, dass jeder zusammenhängende bipartite Graph eine eindeutige Bipartition besitzt. (1 Punkt)

   b) Zeigen Sie, dass jeder nicht-bipartite ungerichtete Graph einen ungeraden Kreis als induzierten Subgraphen besitzt. (1 Punkt)

   c) Zeigen Sie, dass jeder stark zusammenhängende gerichtete Graph, dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph nicht bipartit ist, einen (gerichteten) Kreis ungerader Länge besitzt. (2 Punkte)

3. Kann Dijkstra's Algorithmus für den Fall ganzzahliger und durch eine Konstante $C \in \mathbb{N}$ beschränkter Kantengewichte mit linearer Laufzeit implementiert werden? Wenn ja, wie? (2 Punkte)

4. Modifizieren Sie Dijkstra's Algorithmus so, dass er das *Bottleneck-Pfad-Problem* löst: Gegeben einen gerichteten Graphen G, Kantengewichte $c : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $s, t \in V(G)$, ist ein s-t-Pfad zu finden, dessen längste Kante kürzestmöglich ist. (2 Punkte)

5. Gegeben seien ein azyklischer gerichteter Graph G, $s, t \in V(G)$ und Kantengewichte $c : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, wie ein kürzester s-t-Pfad in Linearzeit gefunden werden kann. (2 Punkte)

6. Sei $G = (V, E)$ ein Branching. Wir bezeichnen w als *Kind* von v, wenn $(v, w) \in E$. Ein *Fibonacci-Wald* ist ein Branching, in dem die Kinder eines jeden Knotens $v \in V$ so geordnet werden können, dass das i-te Kind ($i \in \{1, \ldots, |\delta^+(v)|\}$) mindestens $i - 2$ Kinder besitzt.
   Zeigen Sie: Wenn G ein Fibonacci-Wald ist, dann ist $|\delta^+(v)| \leq 2 \log_2 |V|$ für alle $v \in V$. (4 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 18.11.03 vor der Vorlesung.