Diskrete Mathematik I

3. Übung

1. Zeigen Sie:

   a) Ein ungerichteter Graph mit mindestens zwei Knoten ist zweifach kantenzusammenhängend genau dann, wenn er eine Ohrenzerlegung besitzt. (2 Punkte)

   b) Ein gerichteter Graph ist stark zusammenhängend genau dann, wenn er eine Ohrenzerlegung besitzt. (2 Punkte)

   c) Für einen ungerichteten Graphen G mit mindestens zwei Knoten gilt, dass seine Kanten genau dann so orientiert werden können, dass der entstehende gerichtete Graph stark zusammenhängend ist, wenn G zweifach kantenzusammenhängend ist. (1 Punkt)

2. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass eine Orientierung G' von G existiert und eine aufspannende Arboreszenz T von G', so dass die Menge der Fundamentalkreise bezüglich T genau die Menge der gerichteten Kreise in G' ist. (2 Punkte)

3. Ein *Hamiltonscher Pfad* ist ein Pfad in einem (gerichteten oder ungerichteten) Graphen G, der alle Knoten von G enthält. Ein *Hamiltonscher Kreis* in G ist entsprechend ein Kreis, der alle Knoten von G enthält. Ein *Tournament* ist ein gerichteter Graph, dessen zugrundeliegender ungerichteter Graph ein einfacher vollständiger Graph ist.

   a) Zeigen Sie, dass jedes Tournament einen Hamiltonschen Pfad enthält. (2 Punkte)

   b) Zeigen Sie, dass jedes stark zusammenhängende Tournament einen Hamiltonschen Kreis enthält. (3 Punkte)

4. Zeigen Sie:

   a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein geschachteltes Mengensystem $(\{1, \ldots, n\}, \mathcal{F})$, so dass $\mathcal{F}$ $2n$ verschiedene Mengen enthält. (1 Punkt)

   b) Sei $(U, \mathcal{F})$ ein kreuzungsfreies Mengensystem mit $|U| \geq 2$. Dann enthält $\mathcal{F}$ höchstens $4|U| - 4$ verschiedene Mengen, und diese Schranke ist scharf. (3 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 11.11.03 vor der Vorlesung.