Diskrete Mathematik I

1. Übung

1. a) Zeigen Sie, dass $\log(n!) = \Theta(n \log n)$. (1 Punkt)

   b) Zeigen Sie, dass $n \log n = O(n^{1+\epsilon})$ für jedes $\epsilon > 0$. (1 Punkt)

   c) Gegeben sei ein Algorithmus, dessen Laufzeit $\Theta(n(t + n^{1/t}))$ ist, wobei n die Größe der Eingabe ist und t ein positiver Parameter, der beliebig gewählt werden kann. Wie sollte man t (abhängig von n) wählen, damit die Laufzeit (als Funktion von n) möglichst langsam wächst? (1 Punkt)

2. Zeigen Sie, dass die Laufzeit des in der Vorlesung vorgestellten Enumerations-Algorithmus' für das Bohrer-Problem durch $O(n \cdot n!)$ beschränkt ist. (3 Punkte)

3. Zeigen Sie für jedes ganzzahlige $n \geq 1$

   $$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

   Tip: $1 + x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. (4 Punkte)

4. Ein *vollständiger Graph* ist ein einfacher ungerichteter Graph, in dem jedes Paar von Knoten adjazent ist.

   Sei $G = (V, E)$ ein einfacher ungerichteter Graph. Das *Komplement* von G ist der Graph H, für den $G + H$ ein vollständiger Graph ist.

   Zeigen Sie, dass für einen beliebigen einfachen ungerichteten Graphen G gilt, dass G oder sein Komplement zusammenhängend ist. (2 Punkte)

5. Seien (V, F_1) und (V, F_2) zwei ungerichtete Graphen, die jeweils einen Wald bilden, und $|F_1| < |F_2|$. Zeigen Sie, dass eine Kante $e \in F_2 \setminus F_1$ existiert, so dass $(V,\ F_1 \cup \{e\})$ ein Wald ist. (4 Punkte)

Abgabe bis spätestens Di, den 21.10.03 vor der Vorlesung.