Wintersemester 2011/12
Juniorprofessor Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 12

Dieser Übungszettel ist als Prüfungsvorbereitung gedacht und nicht mehr abzugeben. Die Besprechung erfolgt in der letzten Übung.

CG-Schnitte:
Es sei $S := \{x \in \mathbb{Z}^2_+ \; : \; 4x_1 + x_2 \leq 28, x_1 + 4x_2 \leq 27, x_1 - x_2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie die Facetten von $\operatorname{conv}(S)$ durch Gomory-Chvátal-Schnitte (bestimmen Sie die Facetten zunächst graphisch).

Facetten-bestimmende Ungleichungen: Betrachten Sie das lineare Anordnungsproblem zur Bestimmung einer kostenmaximalen Permutation $\pi : N := \{1, \dots, n\} \to N$, welches wie folgt definiert ist:

$$\begin{array}{rll} \max \sum_{i,j \in N} c_{ij} x_{ij} & & \\ x_{ij} + x_{ji} & = 1 & \forall\, 1 \leq i < j \leq n \\ x_{i_1 i_2} + \dots + x_{i_r i_1} & \leq |C| - 1 & \forall \text{ Kreise } C = \{j_1, \dots, j_r\} \\ x & \in \{0,1\}^{n \times n}. & \end{array}$$

Hierbei ist $x_{ij} = 1$ als i kommt vor j zu interpretieren.

1. Warum bestimmt x eine Permutation?
2. Wie kann obiges IP zur Bestimmung eines kostenmaximalen azyklischen Orientierung eines vollständigen Graphen mit Kantenkosten genutzt werden? (Azyklisches Turnier-Problem.)
3. Zeigen Sie, dass die Ungleichungen mit $|C| \geq 4$ redundant sind.
4. Zeigen Sie, dass die Ungleichungen für $|C| = 3$ facetten-bestimmend sind.

Lagrange-Relaxierung: Gegeben seien $c \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n_+$ und $l \in \mathbb{R}^m$. Das verallgemeinerten Assignment-Problem ist definiert als

$$\begin{array}{rlr} \max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} & & \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} & \leq 1 & \forall 1 \leq i \leq m \\ \sum_{i=1}^m l_i x_{ij} & \leq b_j & \forall 1 \leq j \leq n \\ & x \in \{0,1\}^{m\times n} & \end{array}$$

Diskutieren die 2 kanonischen Lagrange-Relaxierungen bezüglich der folgenden drei Kriterien:

1. Lösbarkeit der Lagrange-Relaxierung
2. Lösbarkeit des Lagrange-Dualen
3. Güte der oberen Schranken, die sich aus dem Dualen ergeben.

Wiederholung Simplexalgorithmus: Im Folgenden sei, so nicht anders geschrieben, immer ein LP in Standardform $\max\{c^\intercal x \,:\, Ax = b, x \geq 0\}$ mit vollem Zeilenrang und $P^=(A,b) \neq \emptyset$ gegeben. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Eine Variable, die beim Simplexalgorithmus gerade in die Basis eingetreten ist, kann die Basis beim nächsten Schritt wieder verlassen.
2. Eine Variable, die beim Simplexalgorithmus gerade die Basis verlassen hat, kann im nächsten Schritt wieder in die Basis eintreten.
3. Ist $x^\star$ eine eindeutige optimale Basislösung und $\tilde{x}$ eine zweitbeste Basislösung mit echt kleineren Kosten, so erhält man $x^\star$ aus $\tilde{x}$ durch Austausch einer Basisvariablen.
4. Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP nach oben beschränkt ist, so ist die Optimallösung eindeutig.
5. Ist $A = A^\intercal$, so ist jede zulässige Lösung des LPs $\max\{c^\intercal x \,:\, Ax = c\}$ optimal.
6. Ist eine Variable x_j ohne Vorzeichenbeschränkung durch $x_j^+ - x_j^-$ $(x_j^+, x_j^- \geq 0)$ ersetzt worden, so ist im Simplexverfahren in jedem Schritt höchstens eine der Variablen x_j^+, x_j^- ungleich Null.

Mentorenveranstaltung: Am Donnerstag, den 26.1. um 18h s.t. wird im Konferenzraum des Arithmeums das Thema „Tetris 3D“ des diesjährigen Programmierwettbewerbs vorgestellt. Alle interessierten Studenten sind hierzu herzlich eingeladen.
Oberseminar Diskrete Mathematik: Am Freitag, den 27.1. um 14h c.t. wird Prof. William Cook im Oberseminar (Seminarraum oder Hörsaal) mit dem Titel „In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation“ vortragen.