

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 10

Aufgabe 1: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^{k+l} : Ax \leq b\}$ ein rationales Polyeder. Zeigen Sie, dass die **gemischt-ganzzahlige Hülle** $\text{conv}(P \cap (\mathbb{Z}^k \times \mathbb{R}^l))$ von P ein Polyeder ist. (5 Punkte)

Aufgabe 2: Es seien $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{Z}^n : Ax \leq b; x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine *superadditive*, d.h. $F(a_1) + F(a_2) \leq F(a_1 + a_2)$ für alle $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^m$, und *nicht-fallende*, d.h. $F(a_1) \leq F(a_2)$ für $a_1 \leq a_2$, Funktion mit $F(0) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^n F(A_j)x_j \leq F(b)$$

für alle $x \in \text{conv}(\mathcal{F})$ zulässig ist, wobei A_j die j -te Spalte von A ist. Hinweis: Zeigen Sie zunächst $F(A_j)x_j \leq F(A_jx_j) \forall x_j \in \mathbb{Z}$. (4 Punkte)

2. Folgern Sie, dass für $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ folgende Ungleichungen gültig für $\text{conv}(\mathcal{F})$ sind:

$$\sum_{j=1}^n [u^\top A_j]x_j \leq [u^\top b]$$

(1 Punkt)

Aufgabe 3: Beweisen Sie, dass jede unimodulare Matrix aus einer Einheitsmatrix durch eine unimodulare Transformation hervorgeht. (5 Punkte)

Aufgabe 4*: Beweisen Sie die ganzzahlige Version des Satzes von Carathéodory. Für jeden spitzen rationalen polyedrischen Kegel C , jede Hilbertbasis $\{a_1, \dots, a_l\}$ von C und jeden ganzzahligen Punkt $x \in C$ gibt es $2n - 1$ Vektoren aus der Hilbertbasis, so dass x eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination dieser Vektoren

ist. Hinweis: Betrachten Sie eine Basislösung von $\max\{y^\top \mathbb{1} : y^\top A = x, y \geq 0\}$, wobei die Zeilen von A aus den Vektoren $\{a_1, \dots, a_l\}$ bestehen, und runden Sie deren Komponenten ab. (* 5 Punkte)

Abgabetermin ist Dienstag, der 17.01.2012, vor der Vorlesung (12:15).

Mentorenveranstaltung:

Am Donnerstag, den 22.12. findet im Konferenzraum des Arithmeums ein Vortrag zum Thema „Umstieg von C auf C++“ statt. Dabei sollen Grundlagen in C++ vermittelt werden um eine objektorientierte Alternative für C zu bieten.