Wintersemester 2011/12 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Juniorprofessor Dr. S. Held | Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 9

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass es für jedes $K \in \mathbb{N}$ ein ganzzahliges Programm mit nur zwei Variablen gibt, so dass der Branch-&-Bound-Algorithmus (Algorithmus 10) mehr als K Branch-&-Bound-Knoten besucht. (5 Punkte).

Aufgabe 2: Eine Ladenkette will m Filialen über Zwischenlager bedienen. Für diese stehen n potentielle Lokationen zur Verfügung. Die Eröffnung eines Zwischenlagers führt zu Fixkosten von $c_j > 0$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$), während die Bedienung einer Filiale $i \in \{1, \ldots, m\}$ über ein Zwischenlager $j \in \{1, \ldots, n\}$ zu Transportkosten von $d_{ij} > 0$ führt. Formulieren Sie das Problem, eine Menge von Zwischenlagern zu öffnen und jede Filiale einem offenen Zwischenlager zuzuordnen, so das die Summe aus Eröffnungskosten und Transportkosten minimiert wird, als IP und dualisieren Sie die LP-Relaxierung. (5 Punkte)

Aufgabe 3:
Das Maximum-Stable-Set-Problem ist wie folgt definiert. Zu einem gegebenen Graphen G ist eine Knotenmenge $S \subseteq V(G)$ maximaler Kardinalität $|S|$ gesucht, so dass $\{v, w\} \notin E(G)$ für alle $v, w \in S$. Eine Knotenmenge S mit $E(G[S]) = \emptyset$ wird auch als *stabile Menge* bezeichnet. Dieses Problem wird durch folgendes ILP modelliert:

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{v \in V(G)} x_v & & & (1)\\
s.d. \quad x_v + x_w \leq 1 & & \forall \{v, w\} \in E(G) & \quad (2)\\
x_v \in \{0, 1\} & & \forall v \in V(G) & \quad (3)
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie,

1. dass es eine Klasse von Instanzen gibt, so dass die Ganzzahligkeitslücke, das ist der Quotient aus dem Optimalwert der linearen Relaxierung, in welcher die Ganzzahligkeitsbedingungen (3) durch

$$0 \leq x_v \leq 1 \quad \forall v \in V(G)$$

ersetzt werden, und dem Optimalwert des ILPs (1)–(3) die Größenordnung $\Omega(|V(G)|)$ hat.

2. dass die Bedingungen (2) erweitert werden können durch

$$\sum_{v \in V(C)} x_v \leq 1 \quad \text{für eine Clique } C \subseteq G,$$

$$\sum_{v \in V(H)} x_v \leq \frac{|V(H)| - 1}{2} \quad \text{für einen Kreis } H \subseteq G \text{ ungerader Länge,}$$

wobei eine Clique ein vollständiger Subgraph von G ist. Geben Sie zudem jeweils ein Beispiel an, in dem der Optimalwert der linearen Relaxierung nach Hinzufügen einer solchen Ungleichung echt verringert wird.

(5 Punkte)

Abgabetermin ist Dienstag, der 20.12.2011, vor der Vorlesung (12:15).

Beachten Sie die Programmieraufgabe auf dem zweiten Zettel!

Mentorenveranstaltung:
Am Donnerstag, den 15.12. um 18 Uhr s.t. stellt Thomas Weyd im Konferenzraum des Arithmeums seine theoretische Bachelorarbeit zum Thema "Leafcell-Layout" vor. Leafcells bestehen immer aus relativ wenigen Transistoren, die geeignet platziert und verdrahtet werden müssen.