Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 7

Aufgabe 1
Zeigen Sie:

1. Für Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{Q}^{n\times p}$ gilt $\text{size}(AB) \leq 2\,(p\,\text{size}(A) + m\,\text{size}(B))$. (2 Punkte)
2. Ist $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt $\text{size}(A^{-1}) \leq 4n^2\text{size}(A)$. (4 Punkte)

Aufgabe 2
Bestimmen Sie $p, q \in \mathbb{N}$ mit $q < 100$, so dass der Abstand $\left|\varphi - \frac{p}{q}\right|$ zum goldenen Schnitt $\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ minimal ist. Begründen Sie, warum Ihre Wahl diese Eigenschaft erfüllt! (3 Punkte)

Aufgabe 3
Es sei $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonaccizahlen, d.h. $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie:

1. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.
2. In jeder Iteration $i \geq 0$ von Algorithmus 6 zur Kettenbrucherweiterung gilt $h_i \geq F_{i+1}$.
3. Der Kettenbruchalgorithmus mit Input $\frac{p}{q}$ terminiert nach $O(\log q)$ Iterationen.

(2+1+2 Punkte)

Aufgabe 4
Es sei $E(A, x) \subset \mathbb{R}^n$ ein Ellipsoid, $a \in \mathbb{R}^n$ und $E' = \{z \in E(A, x) \,:\, a^\intercal z \geq a^\intercal x\}$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid $E(A', x')$ mit $A' = \frac{n^2}{n^2-1}\left(A - \frac{2}{n+1}bb^\intercal\right), x' = x + \frac{1}{n+1}b$ und $b = \frac{1}{\sqrt{a^\intercal Aa}}Aa$ dass Halbellipsoid E' enthält.
Hinweis: Beweisen und nutzen Sie die Sherman-Morrison-Woodbury-Formel:
$(A - uv^\intercal)^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}uv^\intercal A^{-1}}{1-v^\intercal A^{-1}u}$, falls $v^\intercal A^{-1}u \neq 1$. (6 Punkte)

Abgabetermin ist **Dienstag, der 06.12.2011**, vor der Vorlesung (12:15).