

Lineare und ganzzahlige Optimierung

Übungszettel 6

Aufgabe 1

Betrachten Sie folgendes LP mit einer einzelnen Restriktionsgleichung

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s.d.} \quad & \sum_{i=1}^n a_i x_i = b \\ & 1 \geq x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

1. Geben Sie einen einfachen Lösbarkeitstest für das Problem an.
2. Geben Sie einen einfachen Algorithmus mit Laufzeitschranke $O(n \log n)$ an, um die Optimallösung zu bestimmen.

(5 Punkte)

Aufgabe 2

Betrachten Sie ein LP in Standardform $\max\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ und eine optimale Basis B mit optimaler Basislösung x^* und reduzierten Kosten $z_N \leq 0$ (wie z.B. bei Terminierung des Simplexalgorithmus im Pricing-Schritt). Es sei $I \subseteq N$ die Menge der Nichtbasisvariablen, mit reduzierten Kosten $z_j = 0$ ($j \in I$). Zeigen Sie:

1. $I = \emptyset \Rightarrow x^*$ ist die einzige Optimallösung.
2. x^* ist genau dann die einzige Optimallösung, wenn das folgende LP den Optimalwert 0 hat:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} x_i \\ \text{s.d.} \quad & Ax = b, \\ & x_i = 0, \quad i \in N \setminus I, \\ & x_i \geq 0, \quad i \in B \cup I. \end{aligned}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3

Beim Netzwerksimplexalgorithmus muss in jeder Iteration der durch eine Kante $e \in$

$E(G) \setminus T$ definierte Fundamentalkreis C bestimmt werden. Wir nehmen an, dass jeder Knoten einen Zeiger auf seinen Vorgänger auf dem Weg zur Wurzel r über Kanten aus T bereithält. Die Bestimmung von C geht dann leicht in $O(|V(G)|)$ Zeit. Allerdings gilt häufig $|V(G)| \gg |V(C)|$. Zeigen Sie, wie der Gipfel von C

1. durch das Ablaufen von höchstens $2|V(C)|$ Kanten unter Verwendung der Vorgängerzeiger und eines weiteren Speicherbits pro Knoten gefunden werden kann; (3 Punkte)
2. durch das Ablaufen von höchstens $|V(C)|$ Kanten gefunden werden kann, wenn an jedem Knoten v die Baumtiefe (definiert als die Anzahl der Kanten auf dem r - v -Weg durch T) bekannt ist. (2 Punkte)

(Sobald der Gipfel bekannt ist, können die Kanten von C durch Ablaufen von $|V(C)|$ Knoten und Kanten aufgesammelt werden.)

Abgabetermin ist **Dienstag, der 29.11.2011**, vor der Vorlesung (12:15).

Beachten Sie die **Programmieraufgabe** auf dem extra Zettel!